

# 問題H : Gravity Point

原案 : 楠本

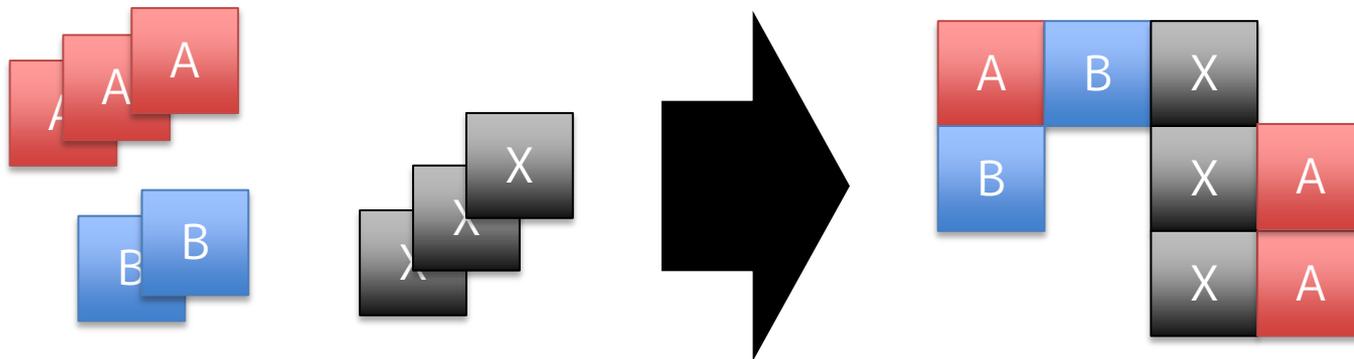
解答 : 楠本, 橋本

問題文 : 橋本

解説 : 楠本

# 問題概要

「タイプA」「タイプB」「タイプX」の3種類のタイルがあり、それらをくっつけてできたオブジェがある。



整数  $m_{A1}, m_{A2}, m_{B1}, m_{B2}, m_X$  が与えられる。

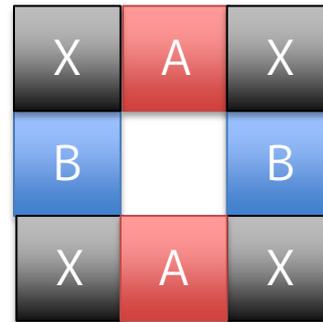
- タイルAの重さが実数区間  $[m_{A1}, m_{A2}]$  から、タイルBの重さが  $[m_{B1}, m_{B2}]$  から一様ランダムで設定される。
- タイルXの重さは  $m_X$  である。

**問：** オブジェの重心がオブジェ上にある確率を求めよ。

# 例

## Example #1

3 3  
2 4 1 2 1  
XAX  
B.B  
XAX



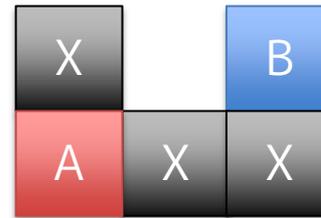
res = 0.0

重さをどう設定しても重心は穴の位置になる.

# 例

## Example #3

2 3  
1 2 3 4 2  
X . B  
A X X



$$\text{res} = 0.5$$

重さの設定によって重心の位置が変わる.



25 38  
42 99 40 89 3

```
.....X.....X.....  
.....XXX.....XXXX.....  
.....XXXXX.....XXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....X.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....X.....  
.....XX.....XXXXXXXXXXXXXXXX.....XX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX.....XX.....  
.....XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX.....  
.....XXXXX.....XXXXXXX.....XXXXX.....  
.....XXXXXX.....XXXXXX.....XXXXXX.....  
.....XXXXXXXXX.....XXXXXX.....XXXXXXXXX.....X.....  
.....XXXXXXXXX.....X.....XXXXX.....X.....XXXXXXXXX.....  
..BBBXXXXXX.....XXXXXXX.....XXXAAAA..  
..BBBXXXX.....XXXXXXX.....AAA..  
..BBBB.....XXXXXXXXX.....AAA..  
.....XXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXX.....  
.....XXXXXXXXX.....
```

res = 0.9418222212582



# 解法

- $m_A \in [m_{A1}, m_{A2}]$ ,  $m_B \in [m_{B1}, m_{B2}]$  を, それぞれタイプA,Bのタイルの重さを表す確率変数とする.
- タイプA,Bのタイルの位置ベクトルの和を  $\mathbf{f}_A$ ,  $\mathbf{f}_B$  とする.
- タイプA,Bのタイルの枚数を  $n_A$ ,  $n_B$  とする.

タイプAのタイルAだけからなる部分の重心は  $\frac{m_A \mathbf{f}_A}{m_A n_A}$  である.

するとオブジェの重心の位置ベクトルは

$$\frac{m_A \mathbf{f}_A + m_B \mathbf{f}_B + m_X \mathbf{f}_X}{m_A n_A + m_B n_B + m_X n_X}$$

となる.

# 解法

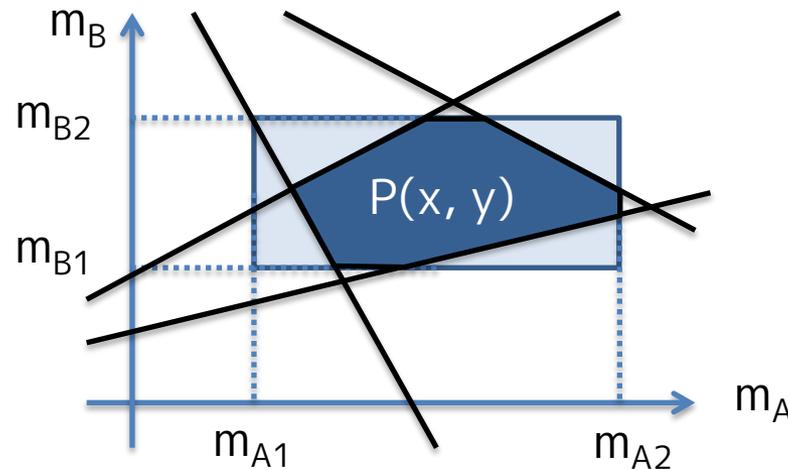
- 重心の位置ベクトルが各タイル  $[x, x+1] \times [y, y+1]$  に入る確率をそれぞれ計算し、最後にそれを足し合わせれば答えが得られる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < \frac{m_A \mathbf{f}_A + m_B \mathbf{f}_B + m_X \mathbf{f}_X}{m_A n_A + m_B n_B + m_X n_X} < \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

- $m_A, m_B$  だけが確率変数であることを考慮してこの式を整理すると、これは  $m_A, m_B$  を変数とする係数既知の4つの1次不等式になる.

# 解法

4つの不等式により,  $m_A, m_B$  のとりうる範囲が制限される.



この領域を  $P(x, y)$  と記すことにすると,

「 $(m_A, m_B) \in P(x, y)$ 」

⇔ 「オブジェの重心が  $[x, x+1] \times [y, y+1]$  に入る」

が成り立つ.

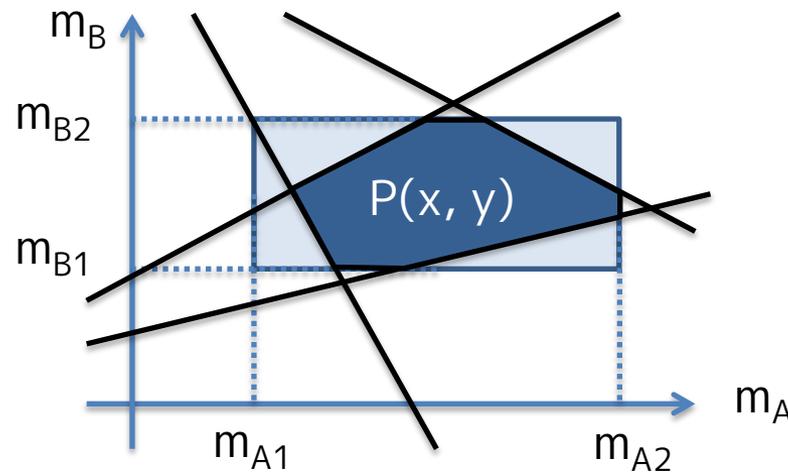
# 解法

$m_A, m_B$  は一様ランダムに取られることを考えると、オブジェの重心が  $[x, x+1] \times [y, y+1]$  に入る確率は

$$P(x, y) / ((m_{A2} - m_{A1}) \times (m_{B2} - m_{B1}))$$

となる。

$P(x, y)$  の面積は多角形の凸カットを使えば楽に計算可能。



# 注意

1次不等式で  $m_A, m_B$  の係数が両方共 0 になるケースに注意.

- 恒等的にその不等式が成立するかを見て, 成立するならばその不等式は無視してよく, 成立しないなら  $P(x, y) = \emptyset$  である.

# 結果

AC / trying / Submission : 4 / 4

解いたチーム :

- プロはイスをつかわない (181:34)
- wakaba (51112) (212:28)
- 【アイマス】我那覇くん総合スレ【映画化決定】  
(51208) (269:37)
- 「 「 (287:40)