JAG Regional Practice Contest 2014

問題 I – Color The Map Extreme

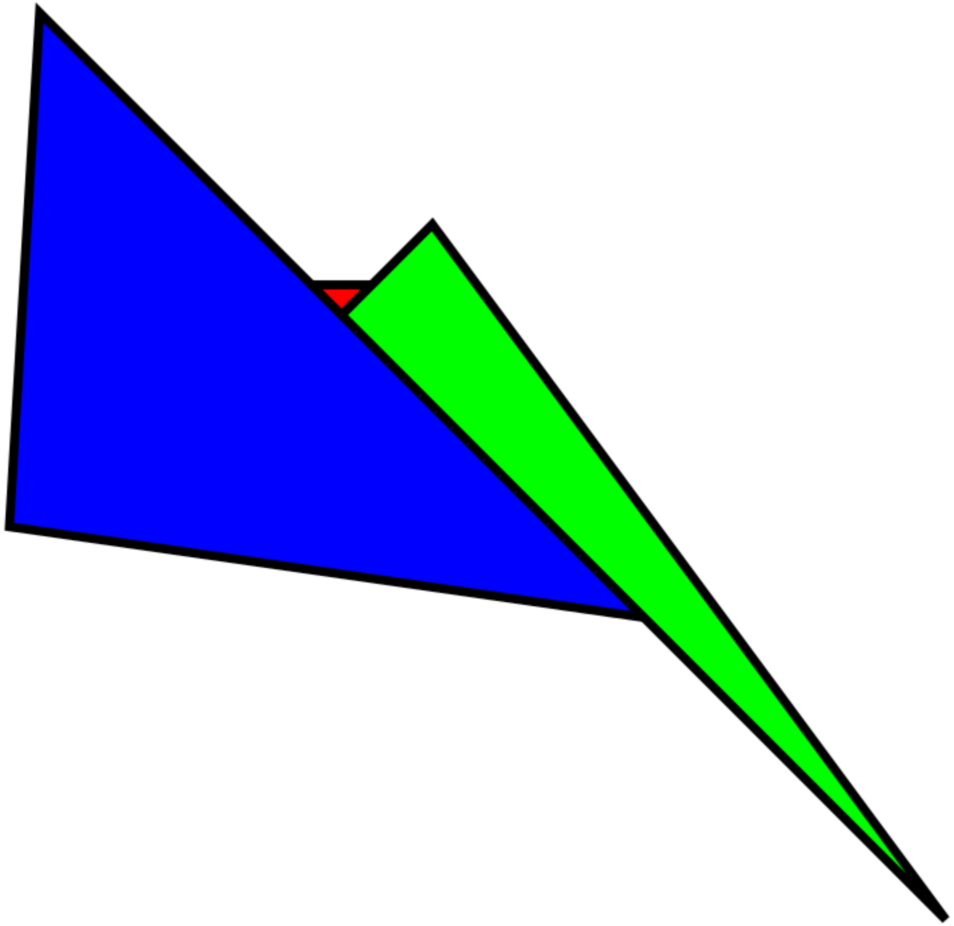
原案:松本(ICPC 2004 Ehime)
解答例:森、井上、保坂
解説:森

問題

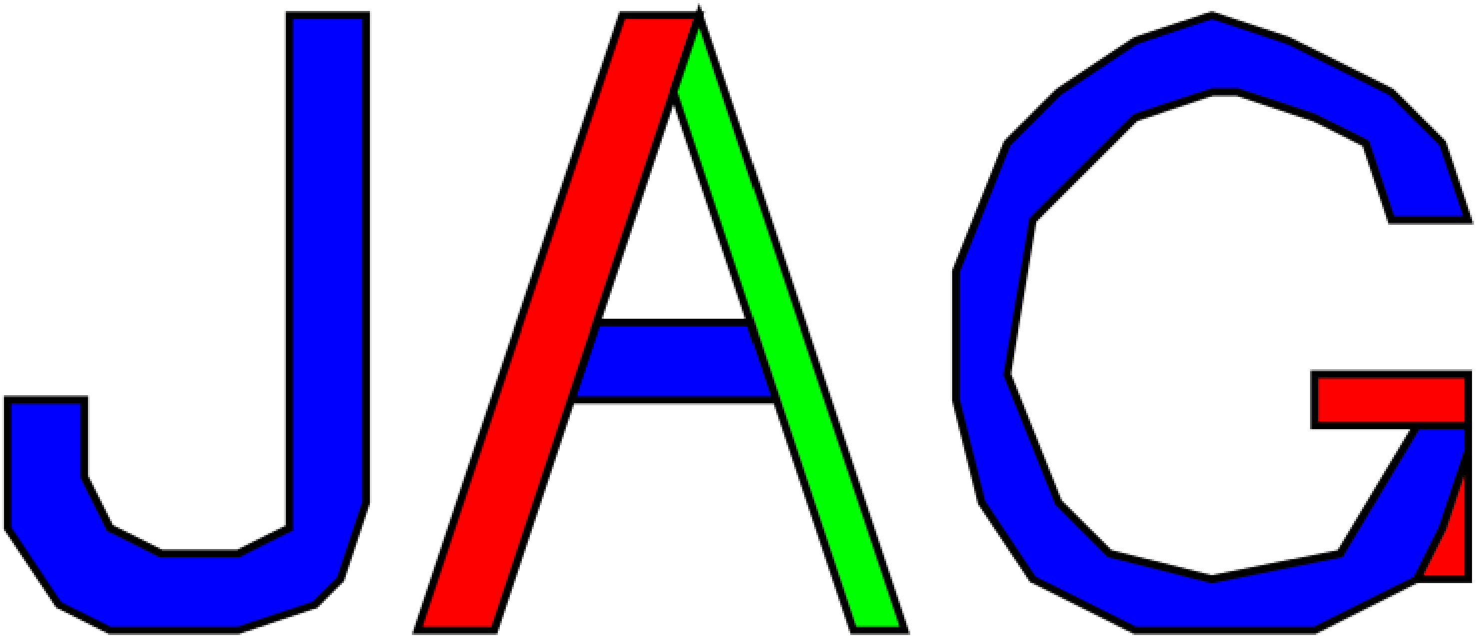
- 国が多角形で示された地図が与えられる
  - 国に飛び地は無し
- 平面彩色を行うためには何色必要か？

- $1 \leq n \leq 35$

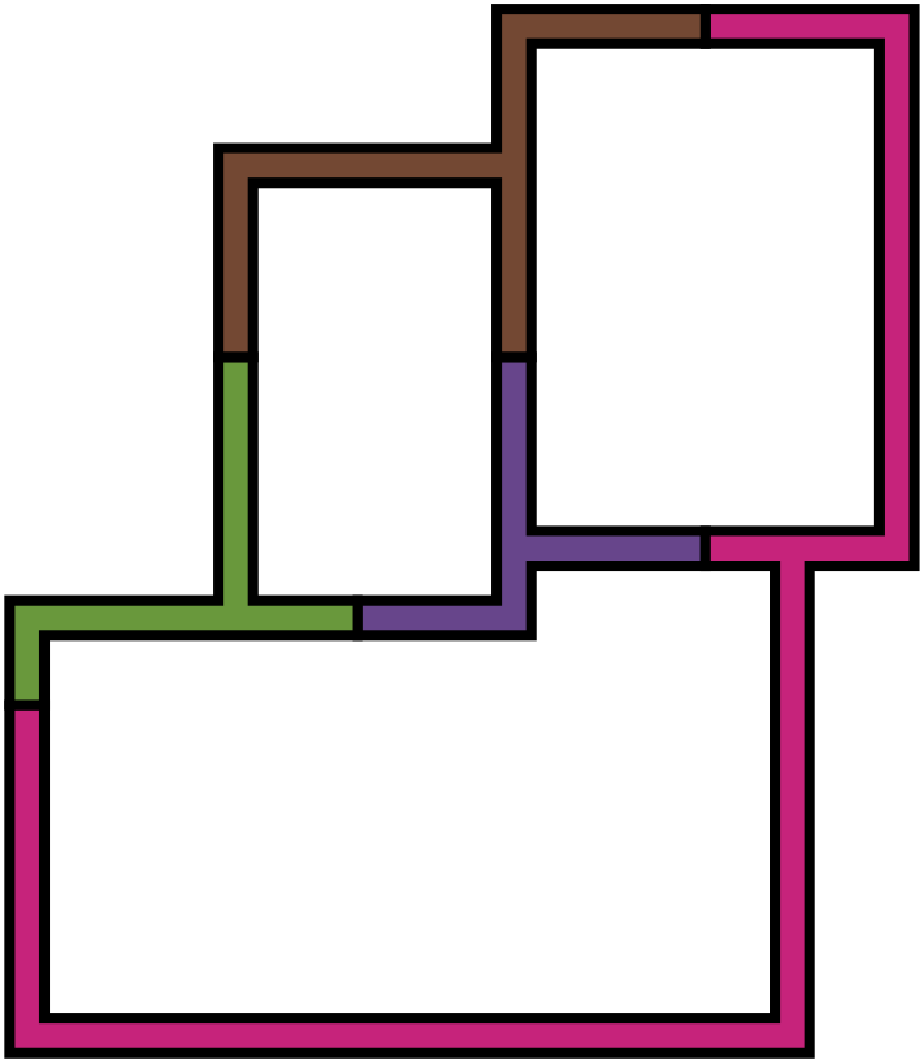
サンプル1、2



サンプル3



サンプル4

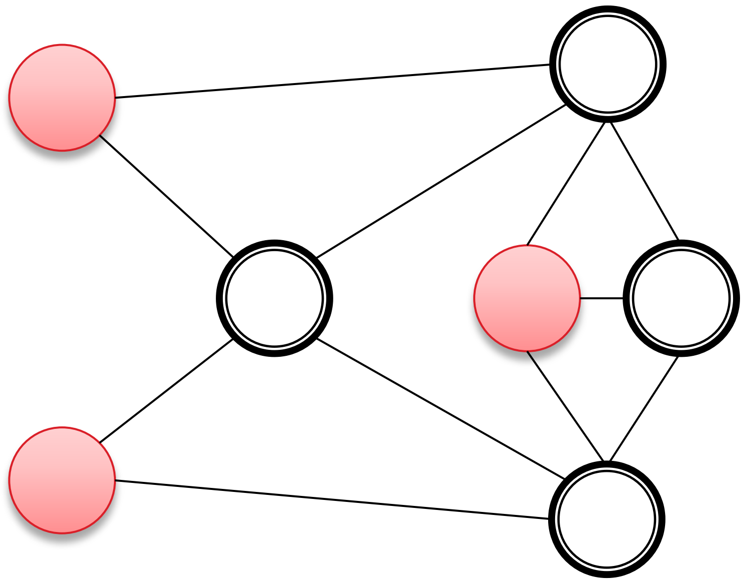


解法

- 地図から平面グラフに変換する
  - mは十分小さいので線分に共通部分があるか全探索する
  - 共通部分が点の場合は連結にならないことに注意
- 平面グラフは常に4色以下で彩色可能
  - 辺が無い場合のみ1色
  - 2部グラフの時のみ2色
  - あとは3色できるかどうかを判定すれば良い
- ただし、$n \leq 35$なので$O(2^n)$はTLE

$o(2^n)$で3彩色を考える

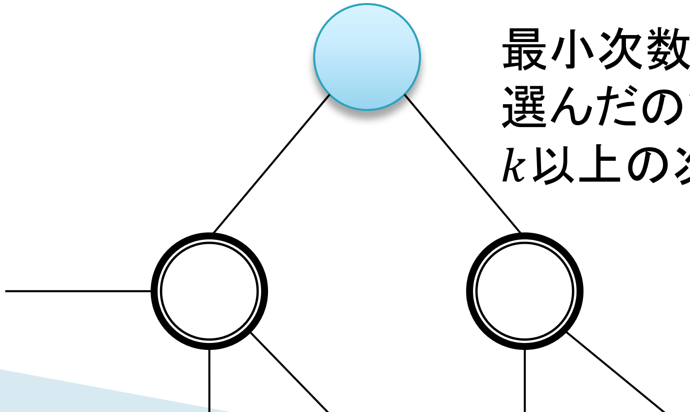
- 半分全列挙っぽいのとかは？
  - 特定の頂点集合を1色で塗って残りを2色で塗る
  - 1色で塗るためには独立集合である必要がある
  - なので、独立集合を列挙すれば良い
    - 2色の方は残った頂点を2彩色可能か$O(n)$でチェックする



独立集合を取って1色決め打ちする

独立集合の数

- 極大な独立集合のみを見ることにすると独立集合の数は$O(3^{n/3} \fallingdotseq 1.44^n)$
  - 最小次数kの頂点vを使うか近傍の頂点を取るか考える
  - vの近傍の頂点を取ってもどちらでも残りの頂点の数は$k+1$個以上減る
  - 分岐が$k+1$択で$k+1$個頂点が減るので$O((k+1)^{n/(k+1)})$で$k=2$の時最大
- 列挙も上記の方法でやれば$O(n3^{n/3})$でできる



別解（モンテカルロ法）

- 各頂点で使う色の候補をランダムに2個に減らす
  - 各頂点での選択肢が2択になったので2-SATで解ける
  - 各頂点で最低$2/3$の確率で正しい色を残すので全体で$(2/3)^n$の以上の確率で正しい答えを返す
  - なので$O(1.5^n)$回程度試行すれば良い

  - ただし、毎回2-SATのグラフを構築する必要があり、定数倍がきつくてTLE or WAしやすい

別解（探索）

- dfs順序で色を決めると$O(2^n)$になる
- 探索の順序を工夫したり、枝刈りを入れると通る
  - MA Orderで探索（訪問済み頂点から最も多く隣接している頂点を選択）
  - 次数2以下の頂点を削除

- 以下の3つはTLE
  - K4があったら即打ち切る
  - 各連結成分ごとに処理
  - 入力をランダムシャッフル

ジャッジ解

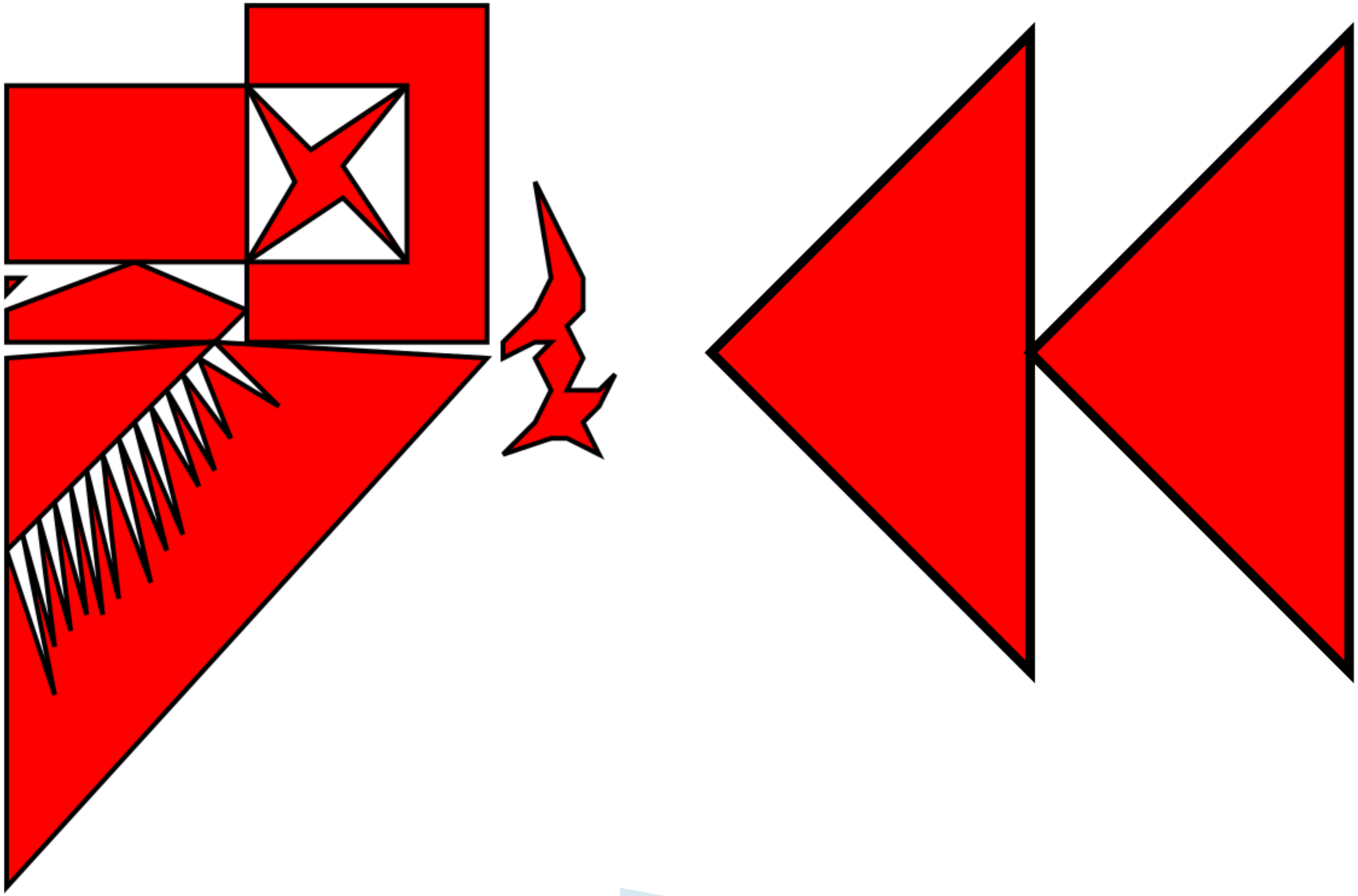
- 森
  - 250行 6700B（独立集合列挙）
  - 310行 8300B（モンテカルロ法）
  - 299行 7900B（探索）
- 井上
  - 162行 3100B（探索）
- 保坂
  - 177行 4100B (独立集合列挙)

結果

- First AC
  - 凍らせないでください。容器破損、成分の分離・沈殿につながります。 (180分)
- AC / Submit
  - 4/ 26 (15%)
- AC / Trying people
  - 4/ 10 (38%)

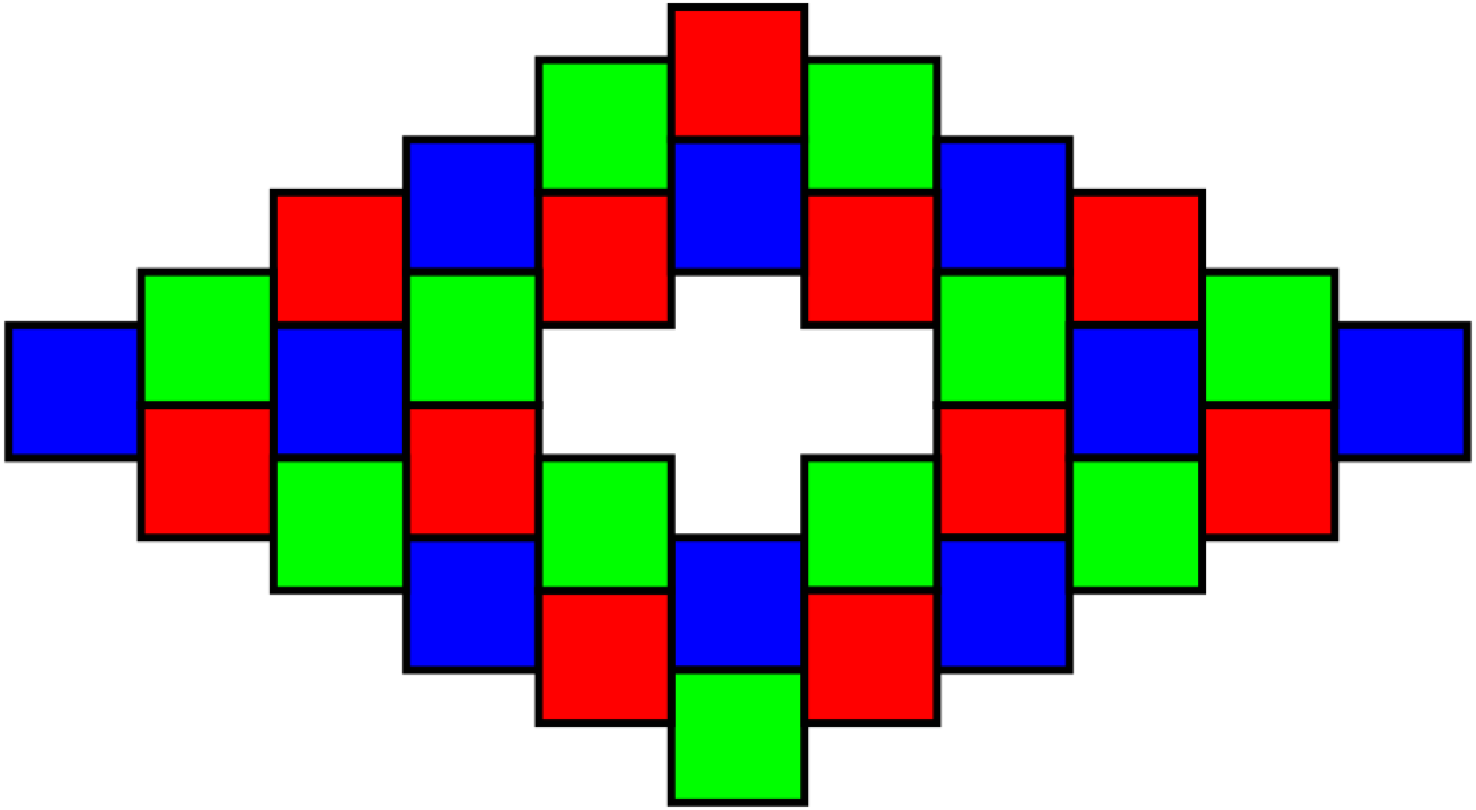
入力例

- 幾何パート用



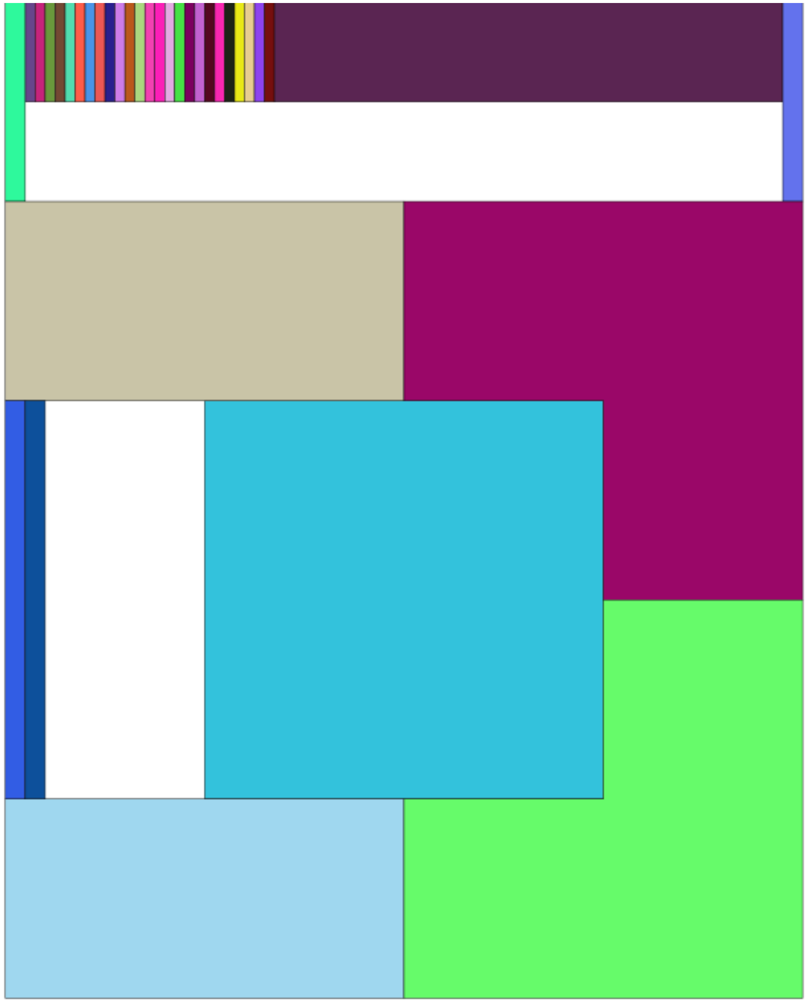
入力例

- 答えが6通りしかない



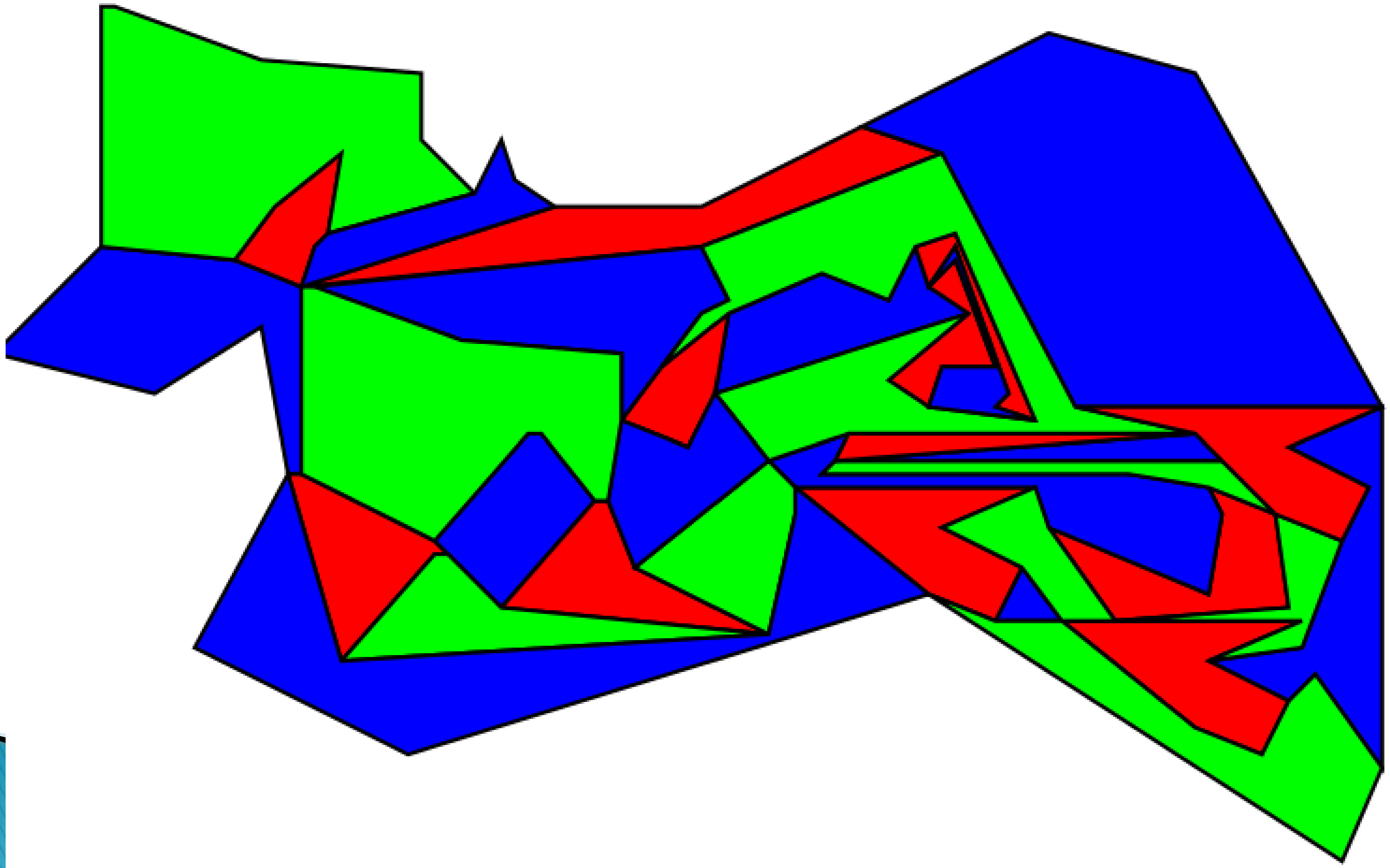
入力例

- $O(2^n)$探索解落とす用

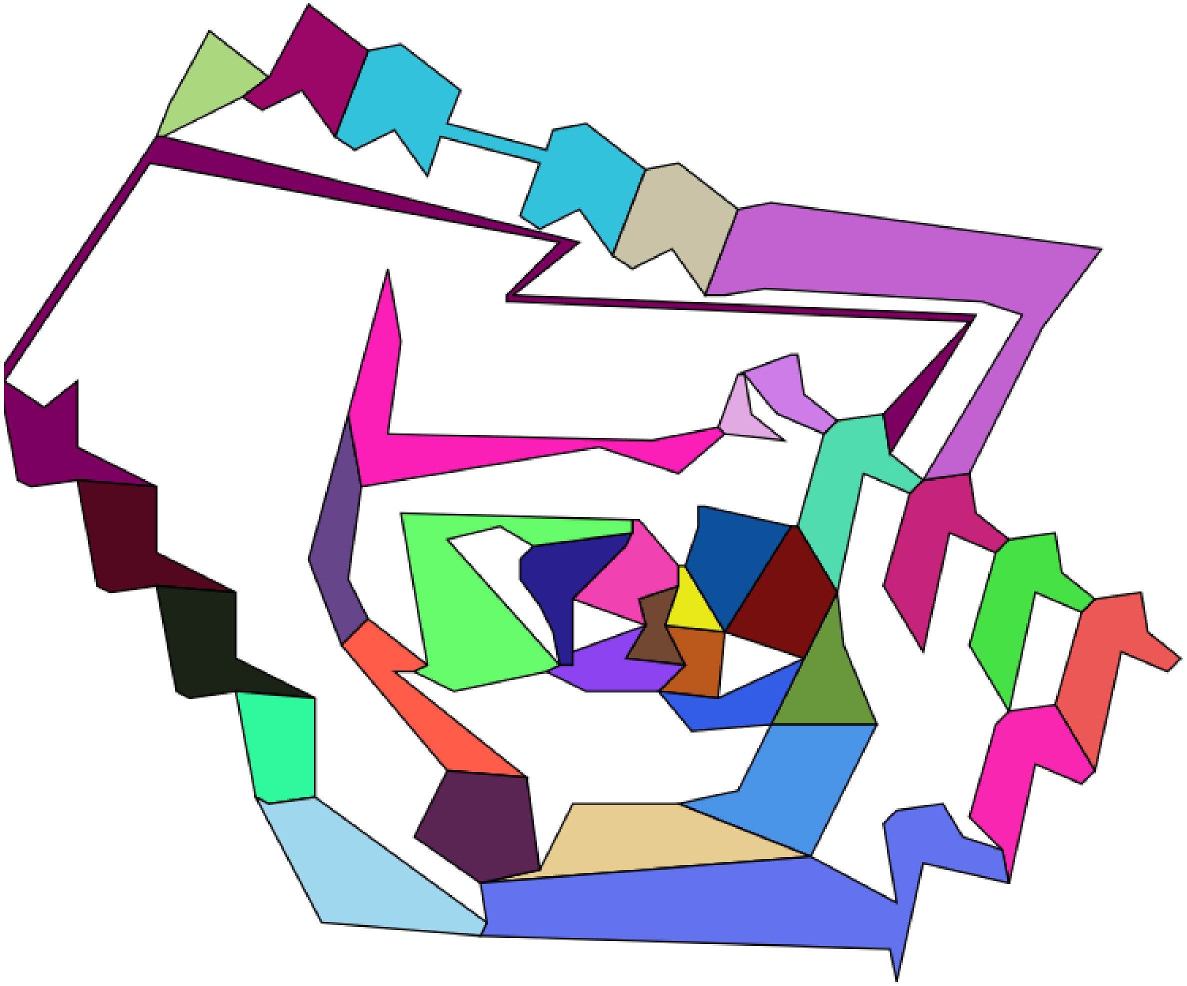


入力例

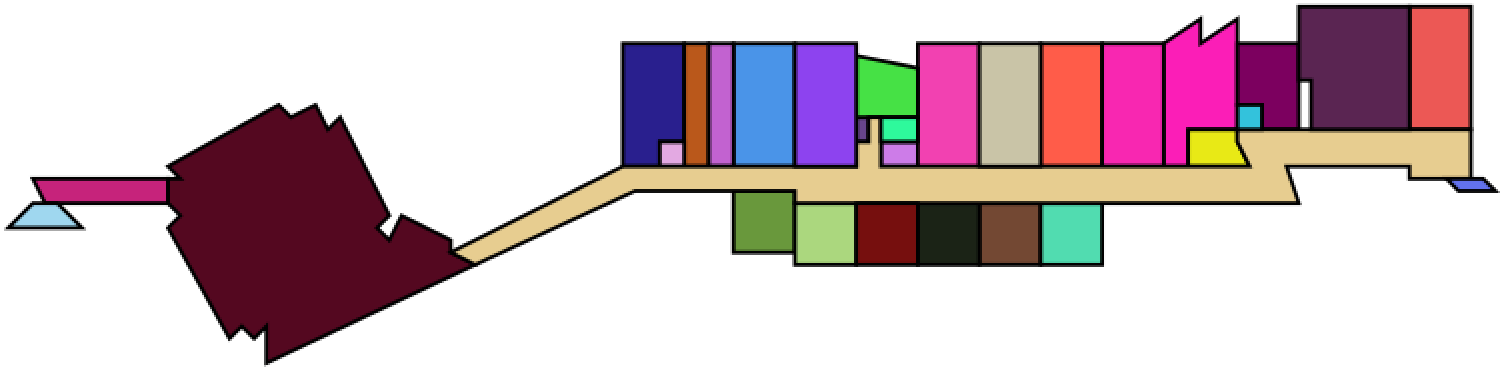
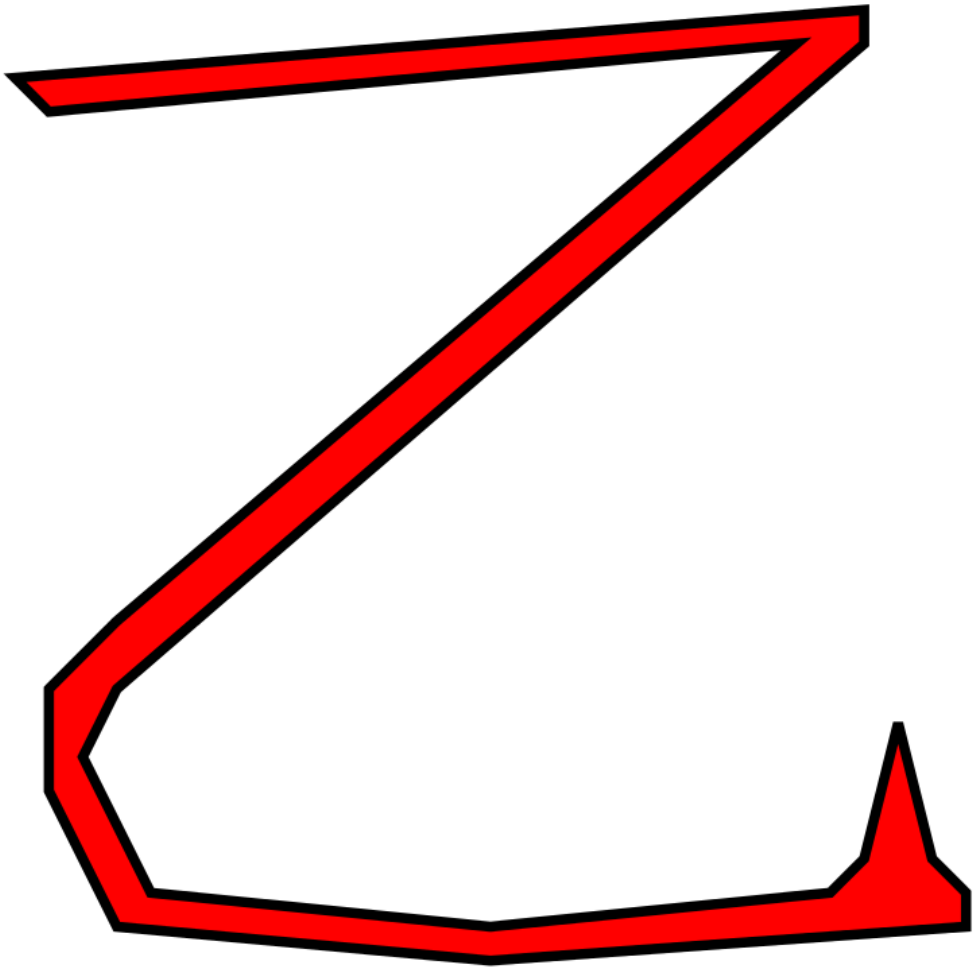
- 次数が全て3以上



入力例



入力例



入力例