KUPC 2012

問題 K – XOR回廊

原案：森
解答例：森、田村
問題文：森
解説：森

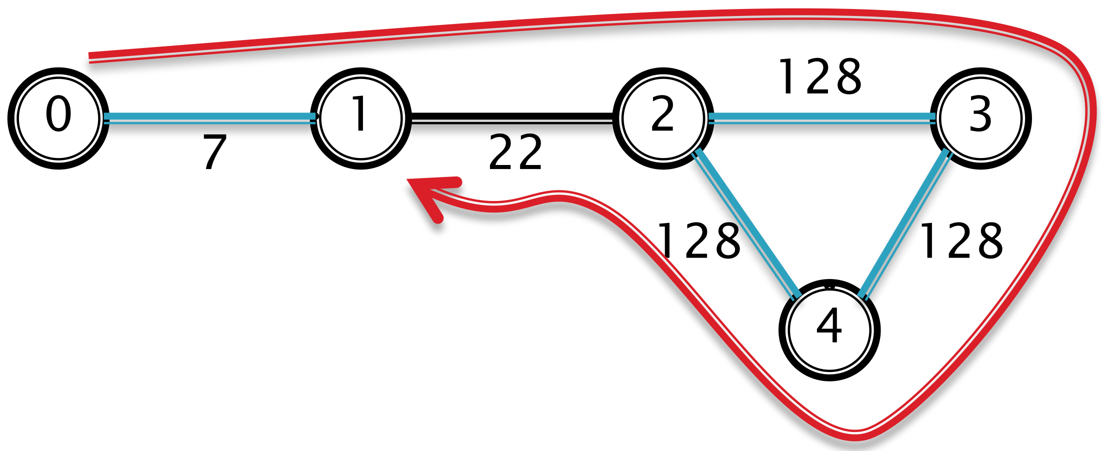
問題

- 頂点数n、変数mの連結グラフGが与えられる
- 各辺のコストはwiで、コストはxorで加算される
- ajからbjまでウォークで行く時のコストの最大値を尋ねるクエリがq個来る

- 1<=n<=100,000
- 0<=m<=200,000
- 1<=q<=100,000
- 0<=wi<2^60

サンプル

- 下のようなグラフ
  - 一つ目のクエリの経路は下のような感じ
  - 青い辺は奇数回通って重みが足されている辺



部分点解法

- m＝20
  - どうみても全列挙です

- 奇数回通った辺の集合をEとする
- 辺集合Eがaj,bjへのウォークとなるための条件は？
- オイラーの一筆書きと同じ条件になる
  - 奇数次数の頂点が2つ、他は偶数次数の頂点
  - 奇数次数の頂点がaj,bjに対応する
  - ただし連結という条件は除く
  - aj,bjの時はオイラー閉路と同じ条件

解法

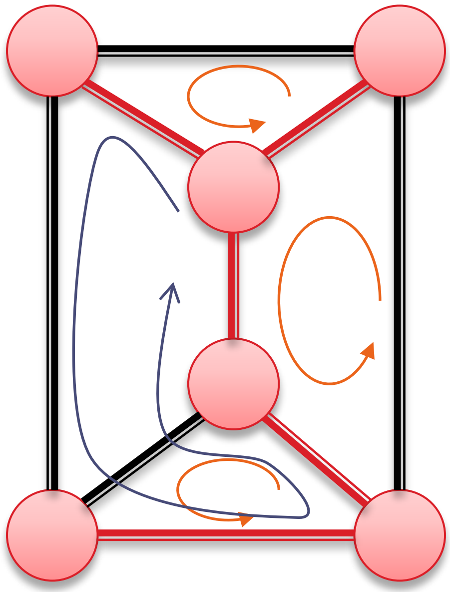
- n,m,q,wi全部でかすぎてどうにもならん
- 閉路があるとそこを通ってコストを変更できる
- なので閉路集合を全部列挙する必要がある
  - 閉路集合の数は2^(m−n+1)個なので無理
- サイクル基底を使うとm−n+1個の基底ベクトルで閉路集合を表現できる

サイクル基底

- mod2上の長さmのベクトルを要素に持つ族を$\mathcal{E}$とする
  - $E(\in\mathcal{E})$のi番目が1だったらその辺は奇数回通っている
- $\mathcal{E}$の部分集合で全頂点が偶数次数になっている物を考える
  - 実は$\mathcal{E}$の部分空間となっており基底ベクトルを取れる
  - 部分空間の次元はm−n+1
  - m−n+1個の基底ベクトルを組み合わせれば任意の閉路集合が表現できる
- 詳しくは『離散数学への招待(下)』の11.4節または『組合せ最適化−理論とアルゴリズム』の2.2節参照

サイクル基底

- 作り方は全域木+その他の辺1本でできる閉路を全部抜き出す
  - 右下の例だと赤い辺と黒い辺1本でできる閉路
- オレンジ色の閉路と青紫色の閉路が基底
  - 組み合わると16個の閉路集合になる
  - 非連結でも良い
    - 上と下の閉路を組み合わせる



式に落とす

- グラフからサイクル基底を抜き出して
その重みを$\{c_1, c_2, \ldots, c_M\} = \mathcal{C}$とする
    - M = m - n + 1
- ajからbjのパスの重みをpとする
    - 値はいろいろあるが1つ取れば良い
- 以下の式を計算する (sumはxorで足す)

$$\max_{C \subseteq \mathcal{C}} \left(p \oplus \sum_{c_i \in C} c_i \right)$$

それでもでかすぎる

- $M = m - n + 1 \fallingdotseq 100{,}000$くらい
- $0 <= p, c_i < 2^{60}$

- DPは無理
- xor系でよく使う二部探索も無理っぽい

そんなにたくさん必要？

- M＝100,000 ってそんなにいらんやろ
- 例えば
  - c1＝0010001
  - c2＝0010100
  - c3＝0000101
  - c4＝0010101
- とするとc1～c4の3つを取ればc1～c4で作れる集合は全て作れる

基底再び

- 厳密に言うとサイクル基底で作り出された閉路のコストc_iはmod2上での59次元ベクトルになっている
- 線形代数的に考えると59次元ベクトルを表現するには基底ベクトルが59本あれば十分
- なので線形独立なベクトルを全て抜き出す前処理をしておけば各クエリに対して$O(\log w)$で計算可能
  - 2^59が立っているベクトル、2^58が立っているベクトル、…、2^0が立っているベクトルと分けておけば楽

まとめ

- 基底を2段階で使って計算量を大幅に削減する
  - サイクル基底で2^(m−n+1)をm−n+1に
  - 閉路のコストをベクトル空間とみなして基底を集めると m−n+1が59に

- 上記の2つの操作はグラフをdfsしながらてきとうにやればできる
- 全体でO(n+(m+q)logw)

ジャッジ解

- 森
  - 97行 2200B
  - 86行 2100B (small)
- 田村
  - 95行　1800B

結果

- First AC
  - cgy4ever (08:09)
- AC / Submit
  - 7 / 39 (18%)
- AC / Trying people
  - 7 / 20 (51%)