

KUPC 2012

問題 1 - 宝探し

原案：森、楠本
解答例：森、花田
問題文：花田
解説：森

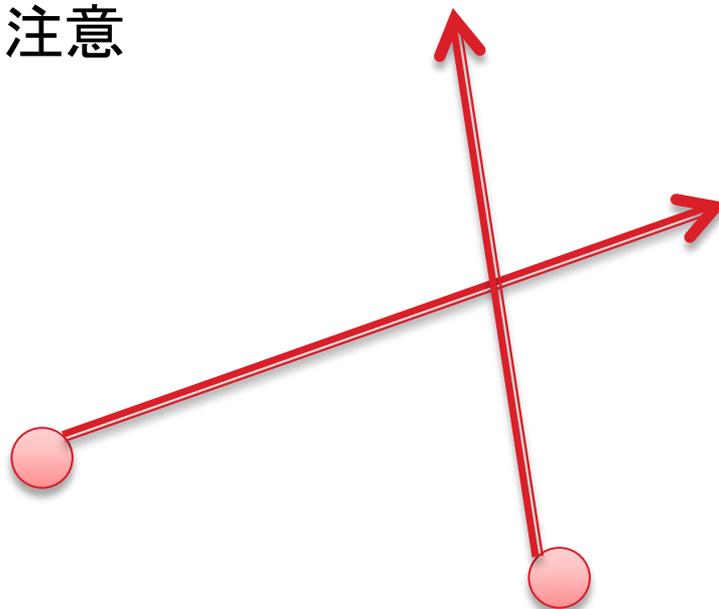
問題

- ▶ $2W \times 2H$ の平面のどこかに宝が埋まっている
- ▶ ある点 (x,y) でダウジングを行うと宝のある方向が誤差 E 度以下で分かる
- ▶ 宝がどこにあるか調べよ

- ▶ $W, H \leq 10,000$
- ▶ $E < 120$ 度
- ▶ クエリの回数 ≤ 200
- ▶ 許容誤差 = 0.5

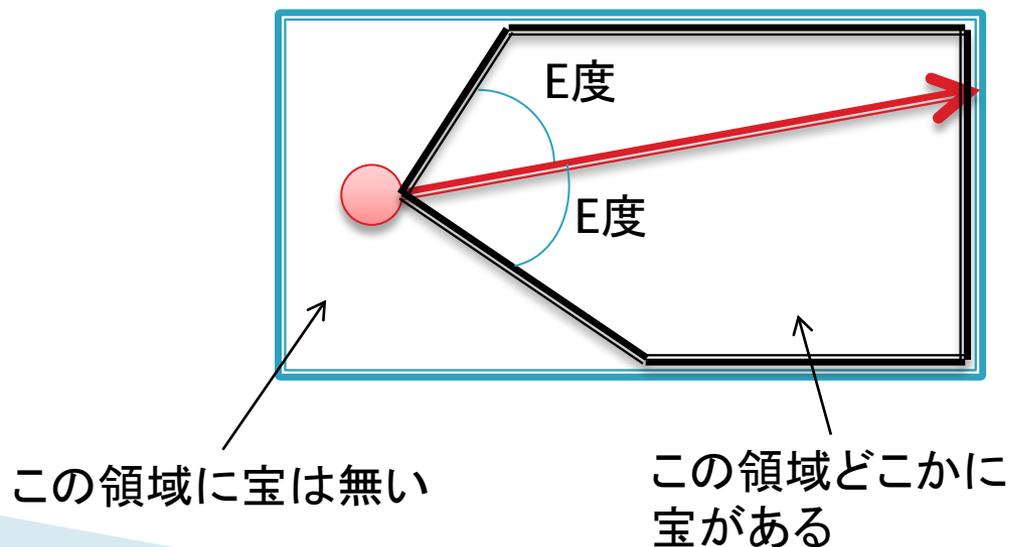
部分点解法

- ▶ $E = 0$
- ▶ 正確にダウジングできるので、てきとうな2点でクエリを投げて交点を調べるだけで良い
 - 同一直線上を選ばないように注意



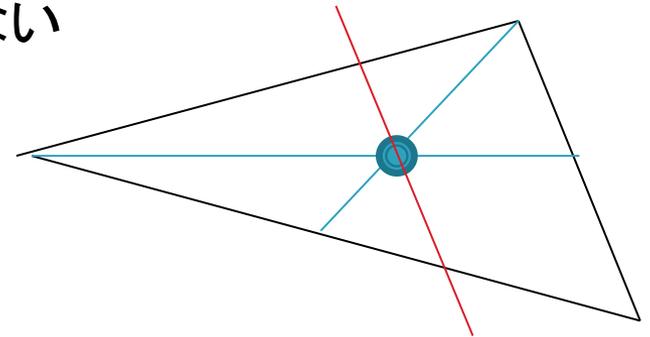
解法

- ▶ $E < 120$ 度は難しいので、 $E \leq 90$ 度で考えてみる
- ▶ 宝の存在領域は初期状態で凸多角形になっている
- ▶ ある地点 (x, y) でダウジングを行うと、 $E \leq 90$ 度なので、その領域を凸カットできる



どこでダウジングを行うか

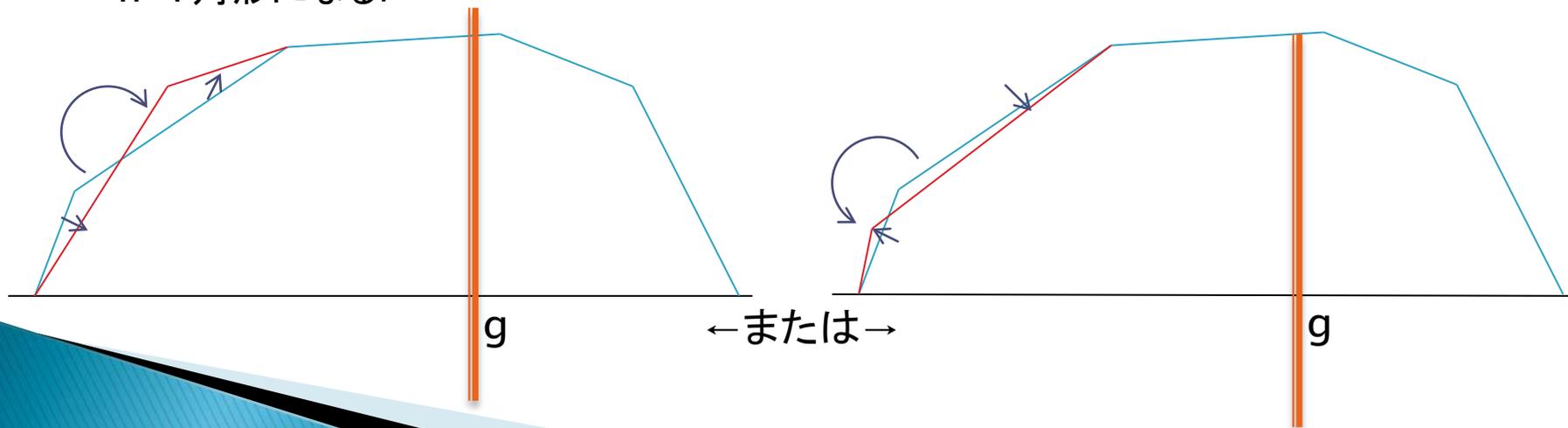
- ▶ ダウジングの結果がどの角度を向いても、面積を一定の割合減らせる箇所でクエリを投げたい
- ▶ 凸多角形の重心でクエリを投げれば、どの方向で切られても問題無さそう
 - 面積が1/2ずつくらいで減っていきそう
 - 正確には5/9以下になることが証明できる
 - 直感的には尖ってる場合が最も減らない
 - 最も尖るのは三角形で右のケース



面積比が4:5になる例

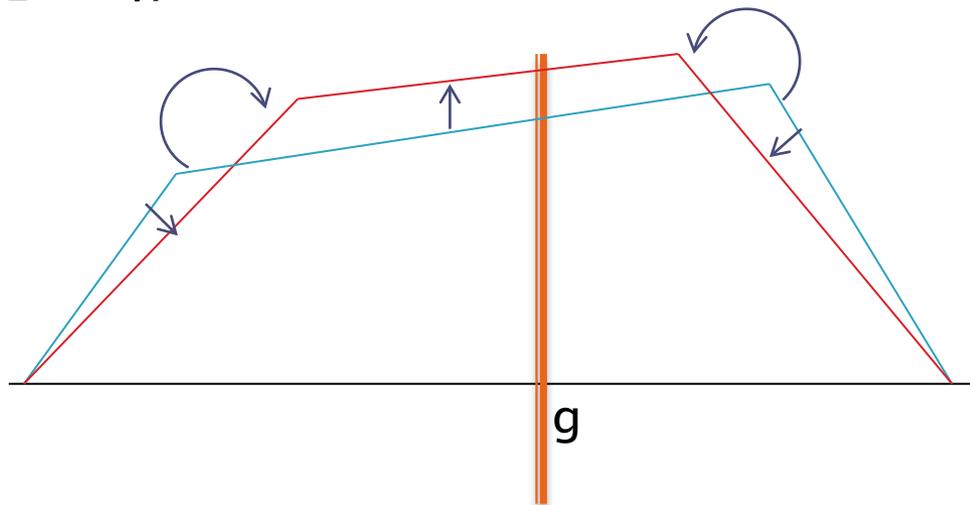
面積 S の凸多角形を，重心を通る直線で切断すると，面積は $5S/9$ 以下になる

- ▶ y 軸に並行な直線で切ると考える.
- ▶ 重心計算では1次モーメントだけが重要なので， $f(x)$ を多角形と x 座標が x となる直線の共通部分の長さとして， $y=f(x)$ と x 軸の囲む領域を考えればいい. f は区分的線分(折れ線)である.
- ▶ 重心の x 座標を g とする. g を通る y 軸に平行な直線で切った時，右側の部分の方が大きくなると仮定する.
- ▶ f が n 個の端点からなる($n \geq 5$)とき: 2つの連続する区分的線分の区間で， g を含まない箇所がある. その箇所について以下のような変換をする. これによって，面積の和は変わらず，片側のみ1次モーメントを減少or増加させることができる. それによって，重心が右か左のどちらかに移動する. 減少と増加のどちらかを適当に選ぶことで，左右に分割される多角形の面積の差を増加させることができる. また，領域は $n-1$ 角形になる.



面積 S の凸多角形を，重心を通る直線で切断すると，面積は $5S/9$ 以下になる

- ▶ $n=4$ のとき. 区分的線分の区間を I_1, I_2, I_3 とする. $g \in I_1, g \in I_3$ のときは↑の方法によってよい. $g \in I_2$ のときが問題である.
- ▶ 先程の変換を (I_1, I_2) と (I_2, I_3) に対し同時に行い，モーメントの変量が同じになるようにする，ということを繰り返す. すると， I_1, I_3 のどちらかの端点が g と一致する. そこで，あとは以前の変換を， g を含まない区間に適応すれば良い.
- ▶ $n=3$ のときは略



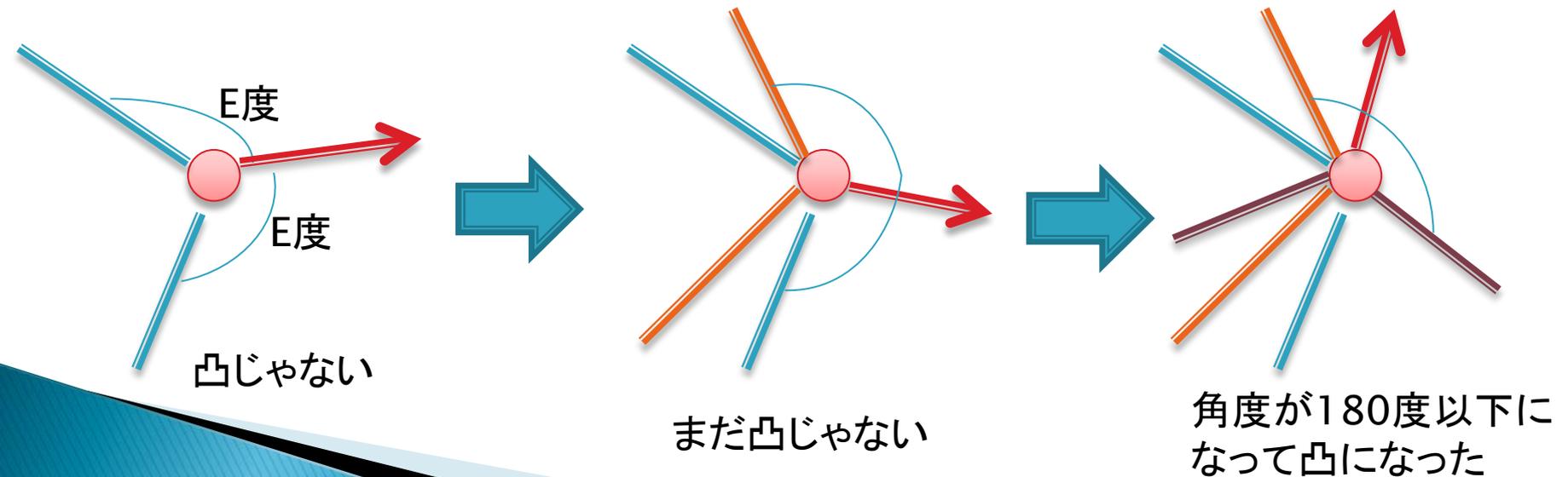
クエリは何回必要？

- ▶ 元の面積は $2W * 2H = 4 * 10^8$
- ▶ 許容誤差は0.5
- ▶ 面積が $5/9$ ずつ減る

- ▶ 計算すると36回で面積が $0.25 = 0.5^2$ くらいになる
 - 40回くらいやれば十分

元の問題に戻る

- ▶ $E < 120$ 度の場合を考える
- ▶ 宝のある領域が凸にならないのがうっとうしい
 - $E \leq 90$ 度で40回しかクエリがいらなかったので、5倍くらい余裕があればなんかできそう
 - 領域が凸になるまでクエリを投げ続ければいいのでは？



領域が凸になるまでの回数の期待値

- ▶ $E=120$ -eps度の時を考える
- ▶ 領域が凸になるための条件は2つのクエリの返答の角度の差が60度~120度になること
 - 120度以上離れると、領域が分断されるため無理
- ▶ 基準となる方向を1回目のクエリで決める
 - 2回目以降で1回目のクエリと60~120度離れた所に出る確率は1/4
 - なので粗い見積でも期待値は5回以下という事が分かる
- ▶ シミュレーションで計算すると期待値は3.4前後らしい

細かい事

- ▶ 面積しか計算してなかったけど、領域が細長くなる場合は大丈夫？
 - 細長くなるためには同じ方向に切られ続けた場合のみ
 - そういうケースの確率は低いので大丈夫
 - $E < 90$ 以下の時は適当に誤差を増幅してやれば問題ない
 - 頑張らなくても、答えを返す場所を重心にしておけば良さそう
- ▶ 誤差には気をつけましょう
 - infが大きすぎると凸カットする時に精度が落ちる

まとめ

- ▶ やることは
 - 凸多角形の重心でクエリを投げる
 - $E \leq 90$ 度以下なら凸カット
 - $90 < E$ なら角度の差が $60 \sim 120$ 度になるペアを見つけるまでクエリを投げ続ける
 - 4,50回凸カットしたら重心を答える
- ▶ 証明、誤差の検証はめんどくさいのでペナルティ覚悟でsubmitした方がいいかも
 - もしくはローカルにテスト環境を作るとか

ジャッジ解

▶ 森

- 194行 5100B
- 123行 3200B (small)

▶ 花田

- 152行 4100B
- 53行 1400B (small)

結果

- ▶ First AC
 - hos.lyric* (179:22)
- ▶ AC / Submit
 - 4 / 216 (2%)
- ▶ AC / Trying people
 - 4 / 41 (19%)