KUPC 2011

問題 J – Mod 3 Knights Out

原案：森
解答例：森、平澤
問題文：森
解説：森

問題

- あるチェス盤の良いナイトの置き方の数はどのくらい？
  - 1<=H<=50, 1<=W<=16

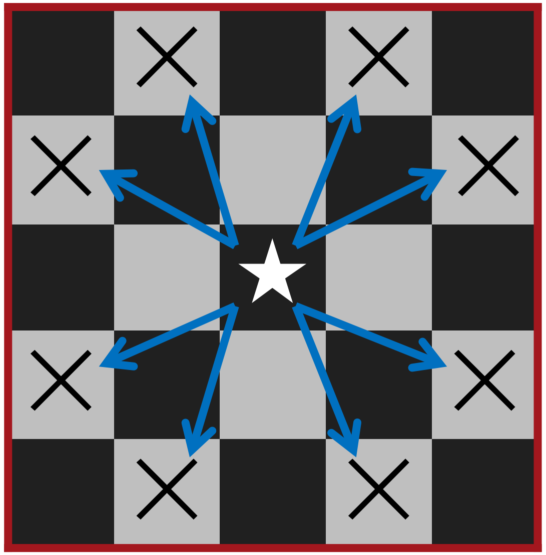
- Hに比べてWが小さい
- 問題文から連立方程式を立てる方針は無理そう
- bit DPも無理臭い

解法

- 以下の2点に気づけば解法が思いつける
  - チェス盤は実は2部グラフになっている
  - 良いナイトの配置は実は少ない

2部グラフ

- 右下の図の★の位置にナイトを置いた場合、攻撃できる位置は×の位置になる
  - 黒マスからは白マスしか攻撃できない
  - 逆もしかり
- 黒いマスの良いナイトの置き方 ＊
  白いマスの良いナイトの置き方
  が答えになる
- 分割によって計算量が減る



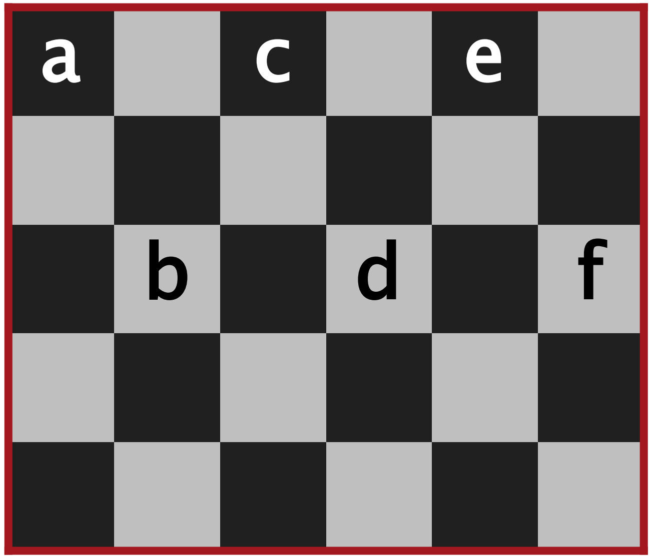
良いナイトの配置

- 入力は 3^{HW} 通りある
- ナイトの置き方は 2^{HW} しか無い
  - 入力に対してナイトの置き方が非常に少ない！
- 解は小さくなるのでは？
  - 実際にほとんどのケースで小さい解になる

- 良いナイトの置き方をバックトラックで全探索する
  - 先ほどの2部グラフに分けるのと併用する
- ここまで解析したらとりあえず書いてみるのも手です
  - やってみると、なぜか間にあう

バックトラックが速い理由(W=偶数)

- 白マスにナイトを置いていく
- y−1行目まではナイトを置いたとする(y>=2)
- aのマスに影響できるのはbのマスのみ
  - aのマスが0ならナイトを置かない、1なら失敗、2ならば置く
  - bのマスにナイトを置くかどうか決定するとcのマスに影響できるのはdだけに
  - 繰り返せばナイトを一行分どう置くかが決まる

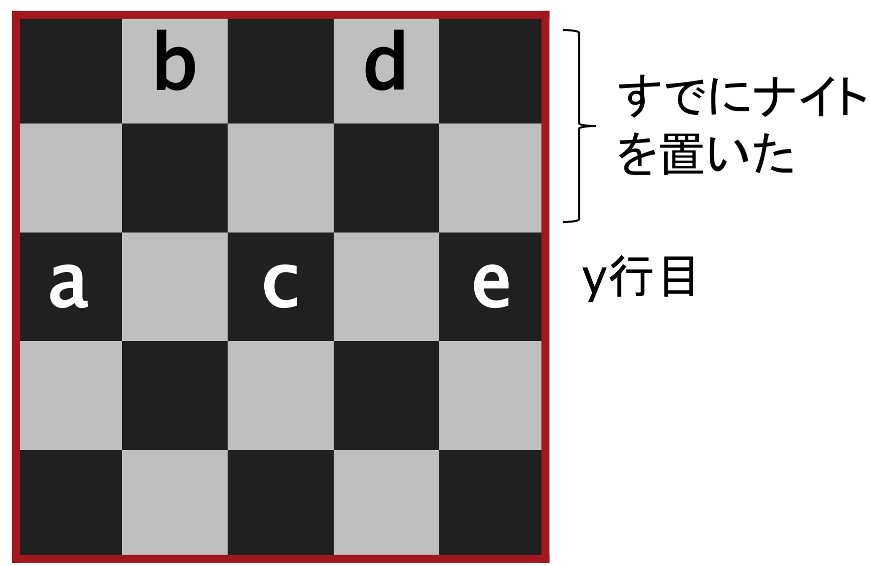


すでにナイトを置いた

y行目

バックトラックが速い理由(W＝奇数)

- 黒マスにナイトを置く
- 例えばW＝5の場合を考える
  - とりあえずaにナイトを置くかどうか決めると偶数の場合と同様に1列決まる
  - b,d＝2の場合、a,eにナイトを置くか、cにナイトを置くかで2通りの置き方がある
- 実はもう一行先(y+1)まで見れば置き方は一通りしか無いことが分かる



バックトラックが速い理由(W＝奇数)

- 1行先を見れば常に一意に決まる？
- プログラムを書いて調べるとW＝7,13の場合に決まらない
  - W＝13の場合は2行先まで見れば一意に決まる
  - W＝7の場合6行先まで見ると一意に決まらないことが分かる

- 6行を使って2通りにしか分岐しないので多くても全体で $256C \times 2^7$ 程度しか分岐しない(Cは定数)
  - 速い！

コーナーケース

- W＝1(or H＝1)で各マスが0の場合
  - 答えは $2^{HW}\%1000000007$になる
- 攻撃される位置が存在しない場合
  - サンプルの2番目のケースなど (下の場合)
  - 中央にはナイトを置いても置かなくてもどちらでも良い

    3 3
    2 2 2
    2 0 2
    2 2 2

結果

- First AC
  - 無し
- AC / Submit
  - 0 / 8 (0%)
- AC / Trying people
  - 0 / 2 (0%)