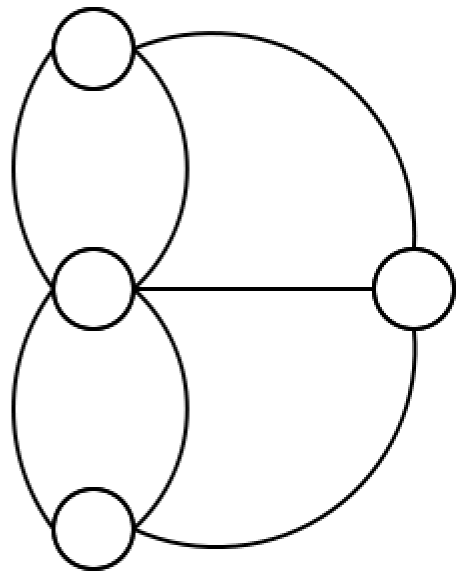
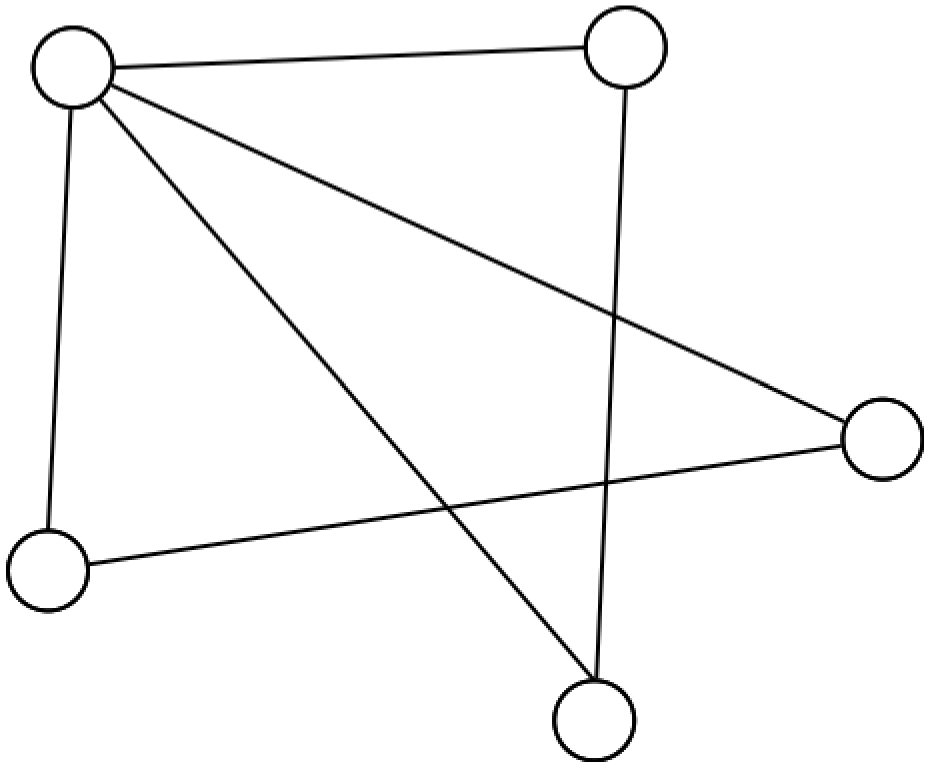
組み合わせ最適化
2章 グラフ(後半)

cos

ケーニヒスベルクの橋



オイラーグラフ



定義2.23

定理2.24

- 必要性は明らか
- 十分性の証明

1, 最長のウォークWを取る。

2, 次数条件から閉ウォークになる。

3, Wに含まれない辺eがあればより長いウォークを作れてしまうのでそのようなeは存在しない。

4, Wは全ての辺を含む閉ウォークになる。

アルゴリズム2.3

1, 点を一つ選ぶ。

2, グラフを同じ辺を通らないように進めるだけ進む。

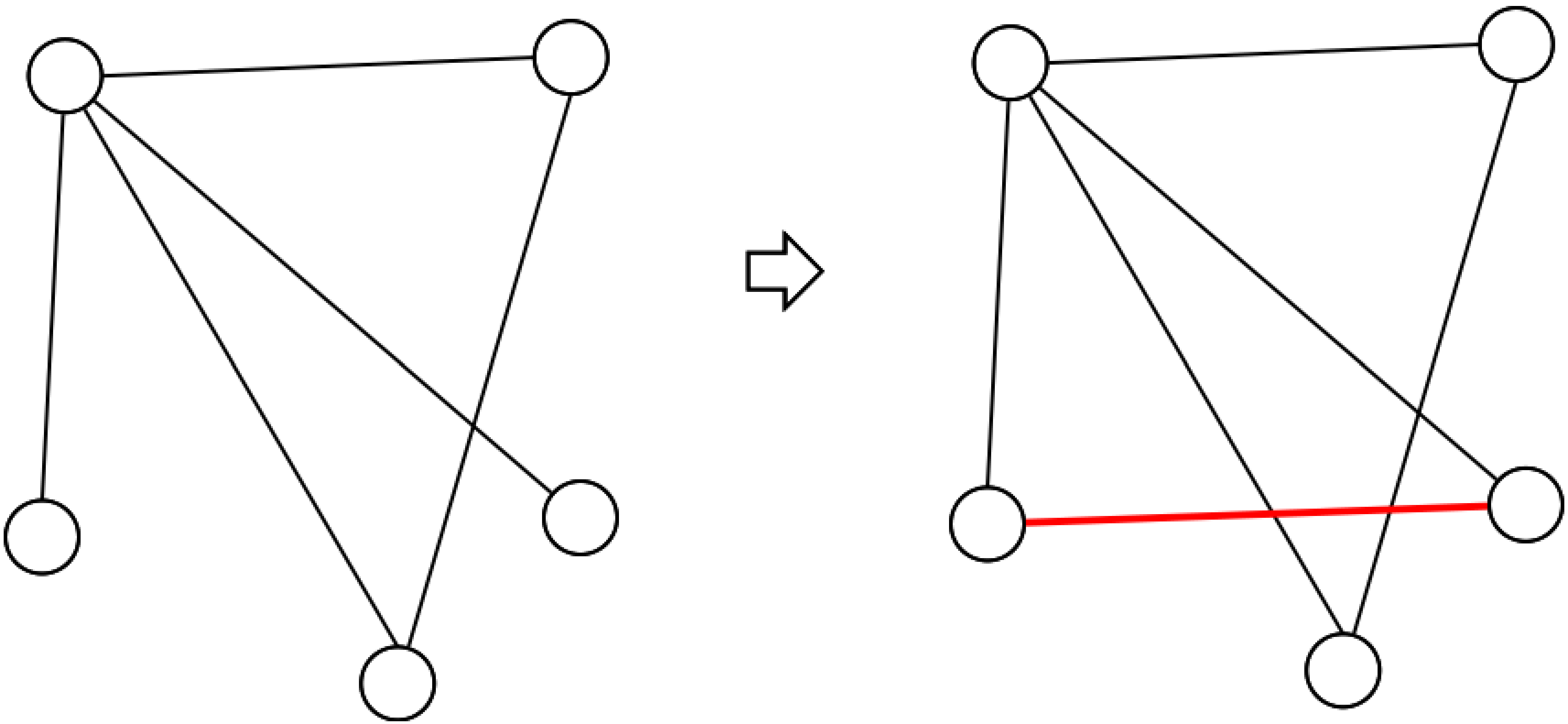
3, それ以上進めなくなったら、たどった点の順番に点を選び再帰的に繰り返す。

4, 全ての点に対して3を適応したらウォークをくっつける。

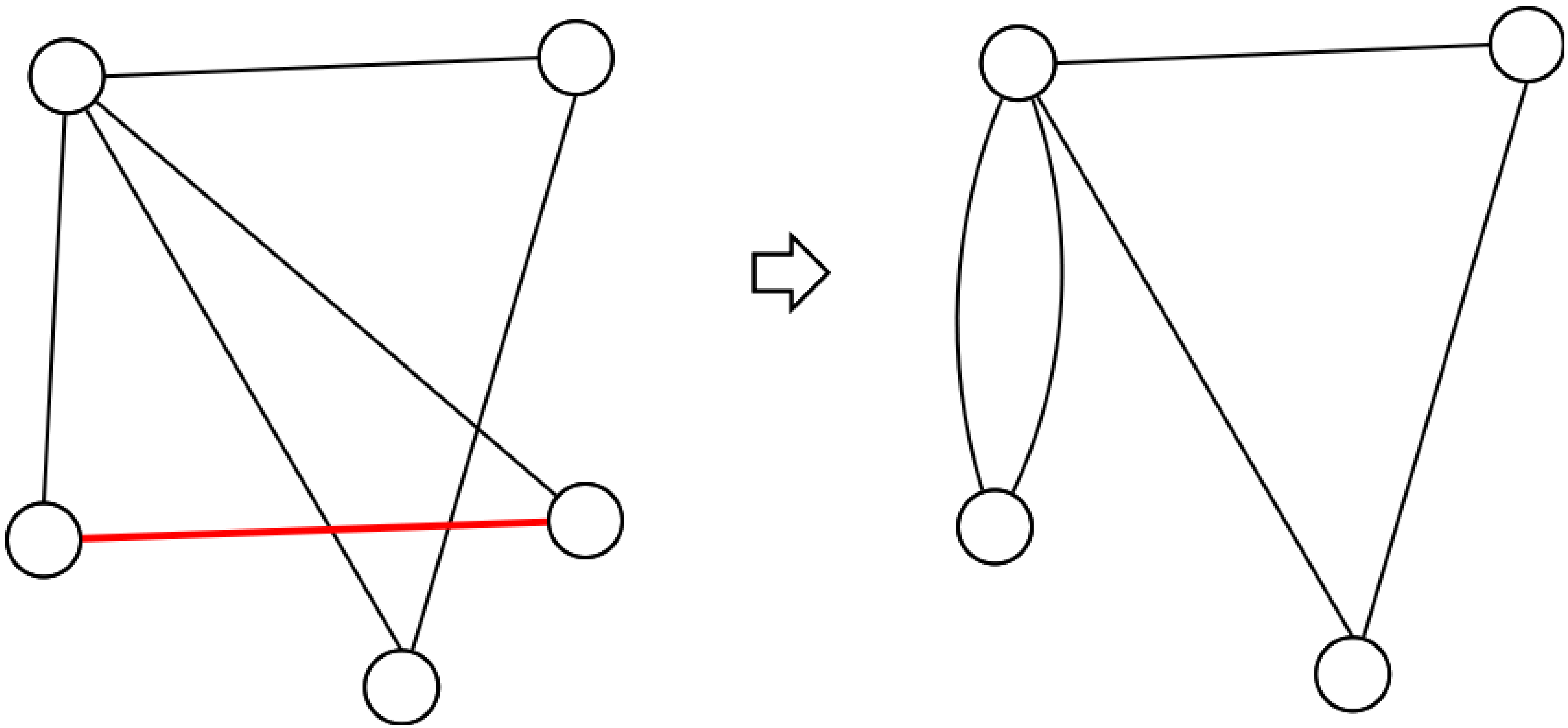
定理2.25

- E(G) = 0の時自明
- 次数条件より④が実行される時、閉ウォークWになる。
- G'は(非連結な)オイラーグラフとなり、W上の点を少なくとも一つ含む。
- 帰納法によりG'はオイラーウォークを返しG1もオイラーウォークを返すことになる。
- 各辺は一回しか確かめられないので計算時間は線形。

奇数ジョイン



奇数カバー

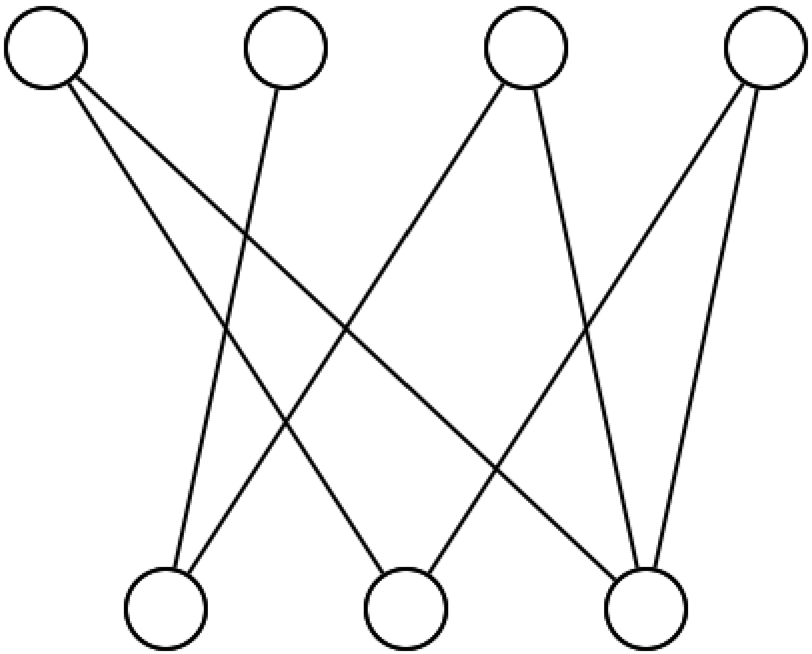


定理2.26

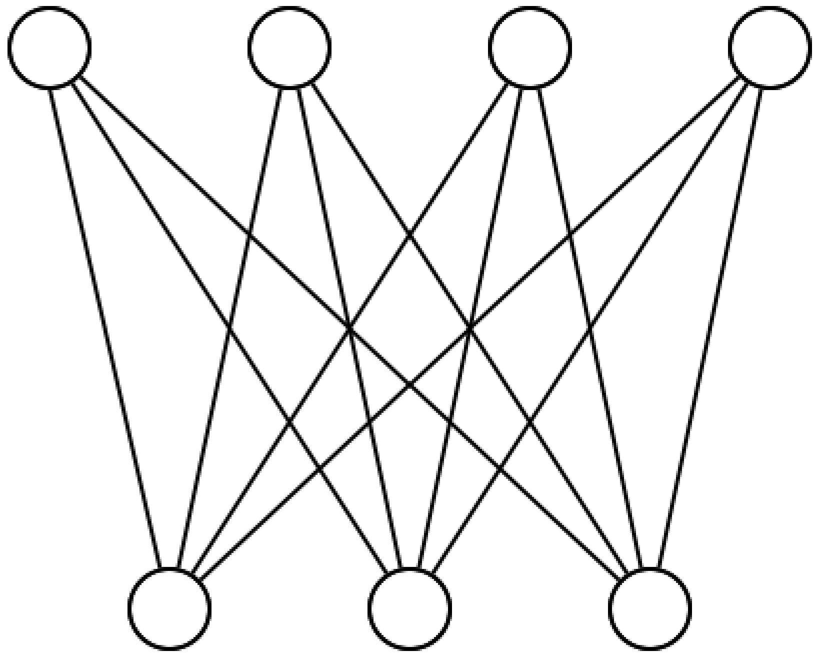
(a)Fに含まれない点は全て偶数次数で、Fの各連結成分は奇数次数の点を偶数個含むので奇数カバーになる。

(b)略

二部グラフ



完全二部グラフ



命題2.27

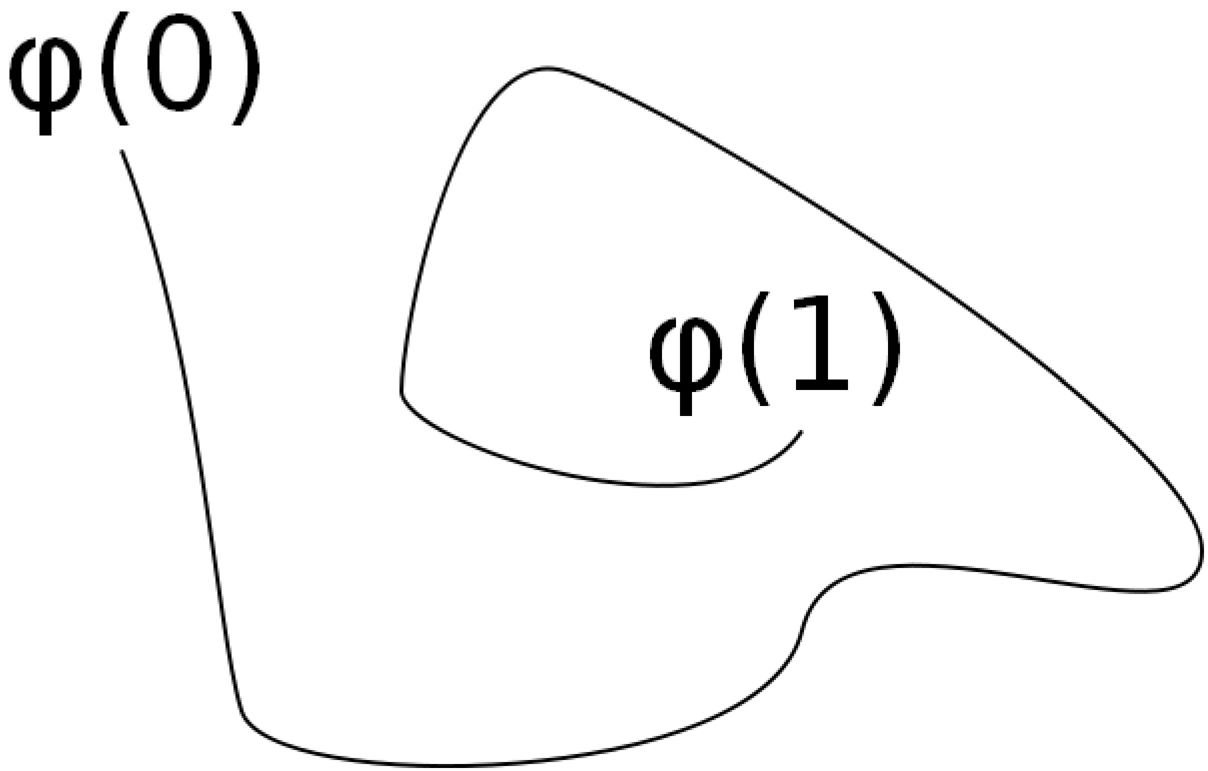
- 必要性

長さkの閉路があった時、$v(2i) \in B, v(2i-1) \in A$ となり$v(k+1)=v1 \in A$なのでkは偶数

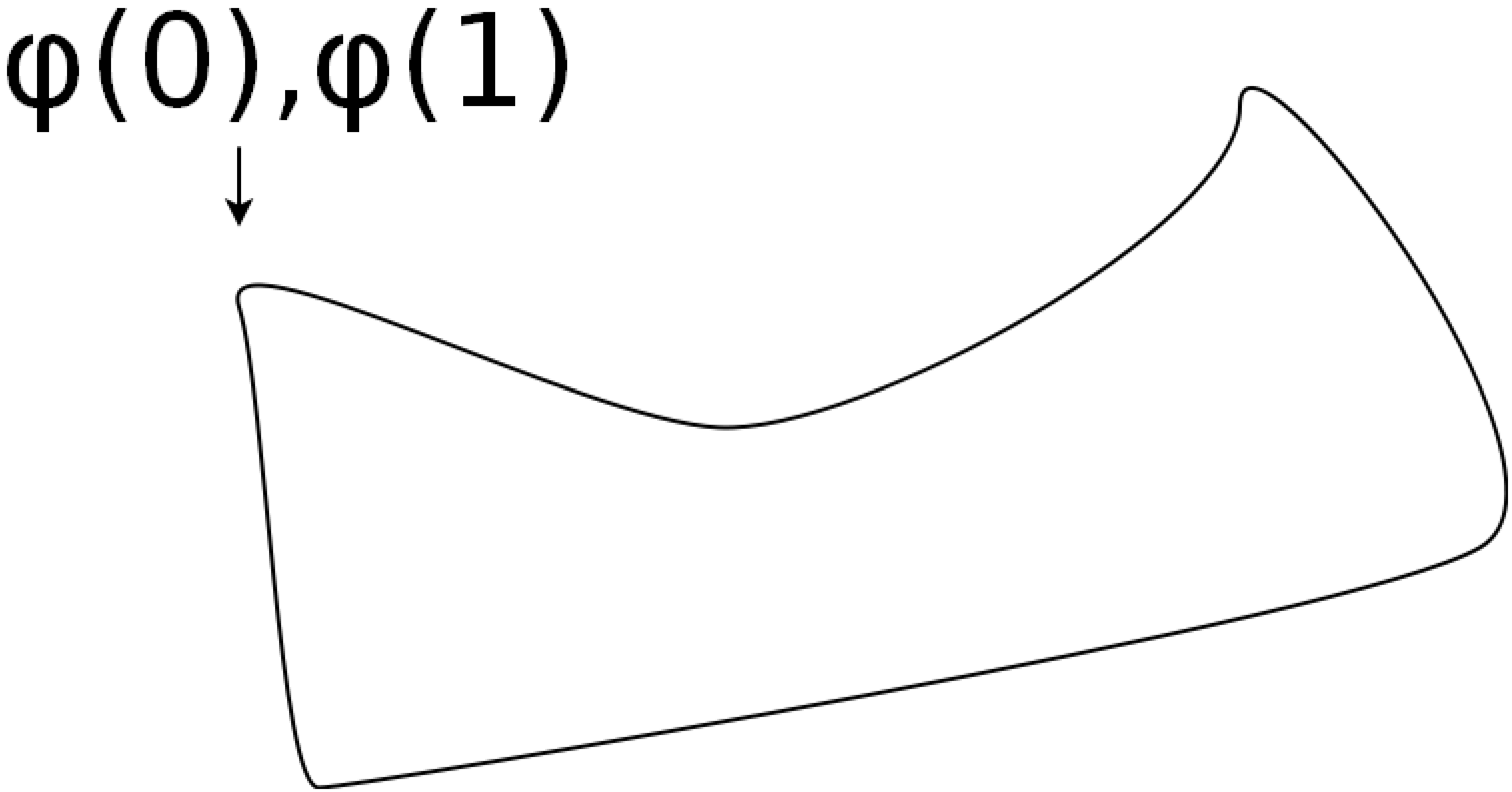
- 十分性

点sからの距離が偶数の点をA、それ以外の点をBとする。AあるいはBに辺eが存在すれば奇数閉路が得られるので奇数閉路が存在しなければ2部グラフになる。

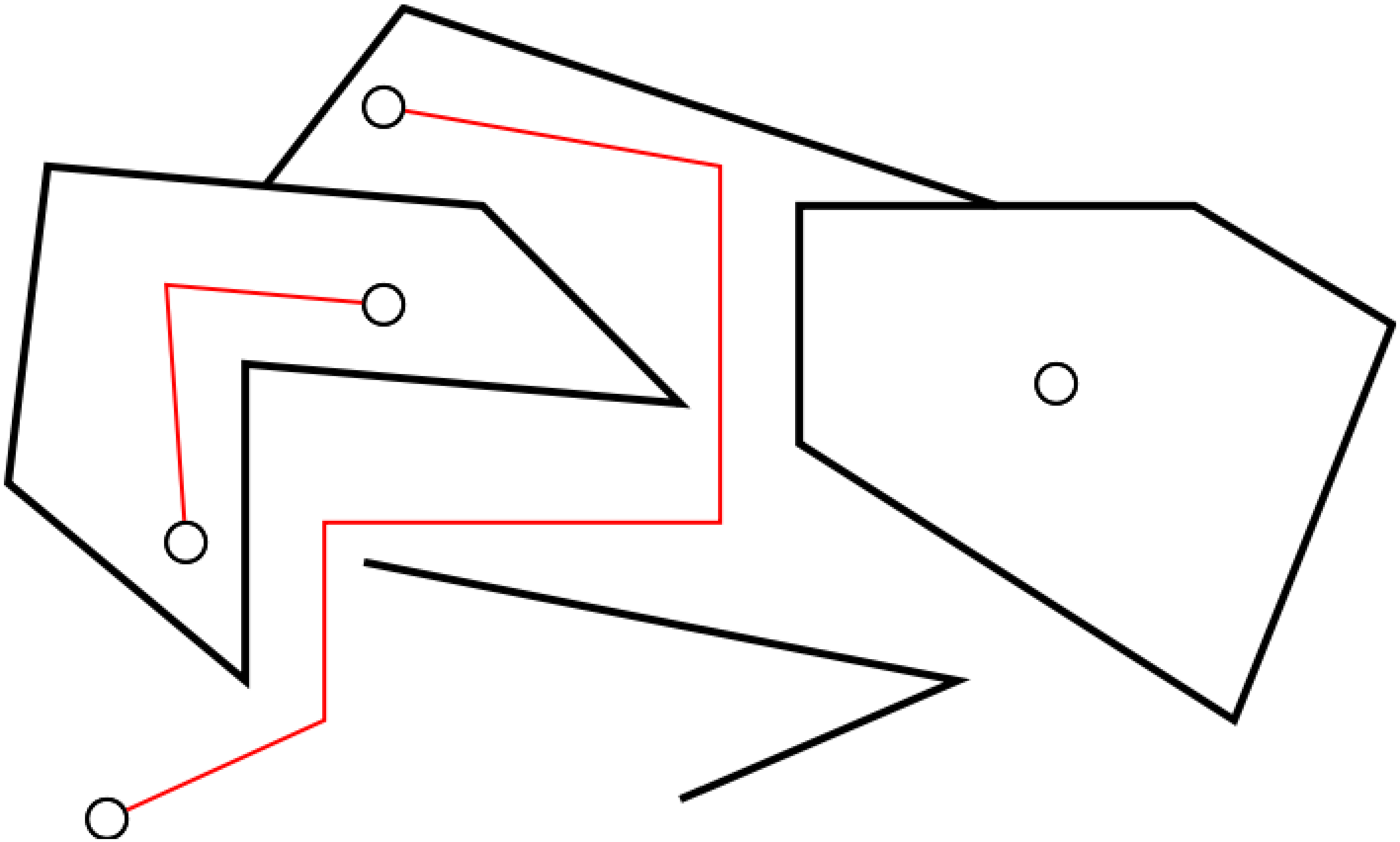
単純ジョルダン曲線



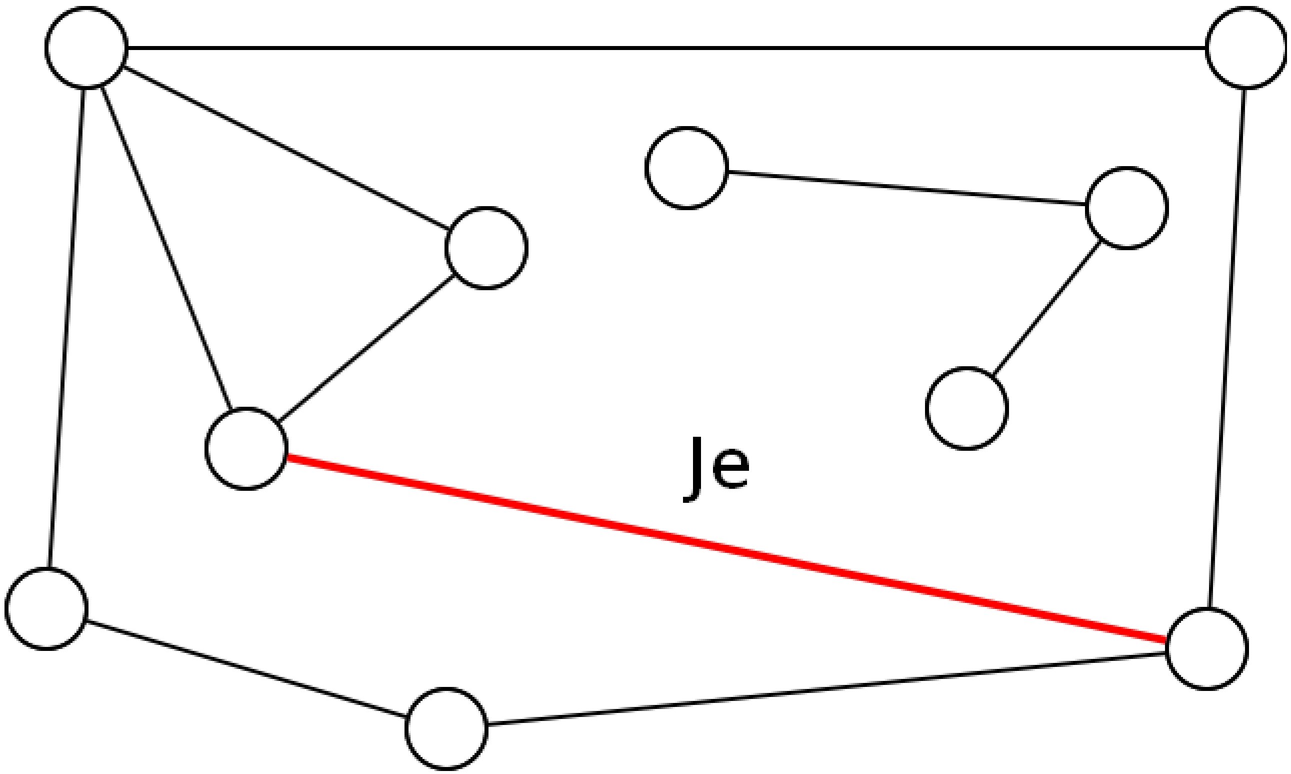
閉ジョルダン曲線



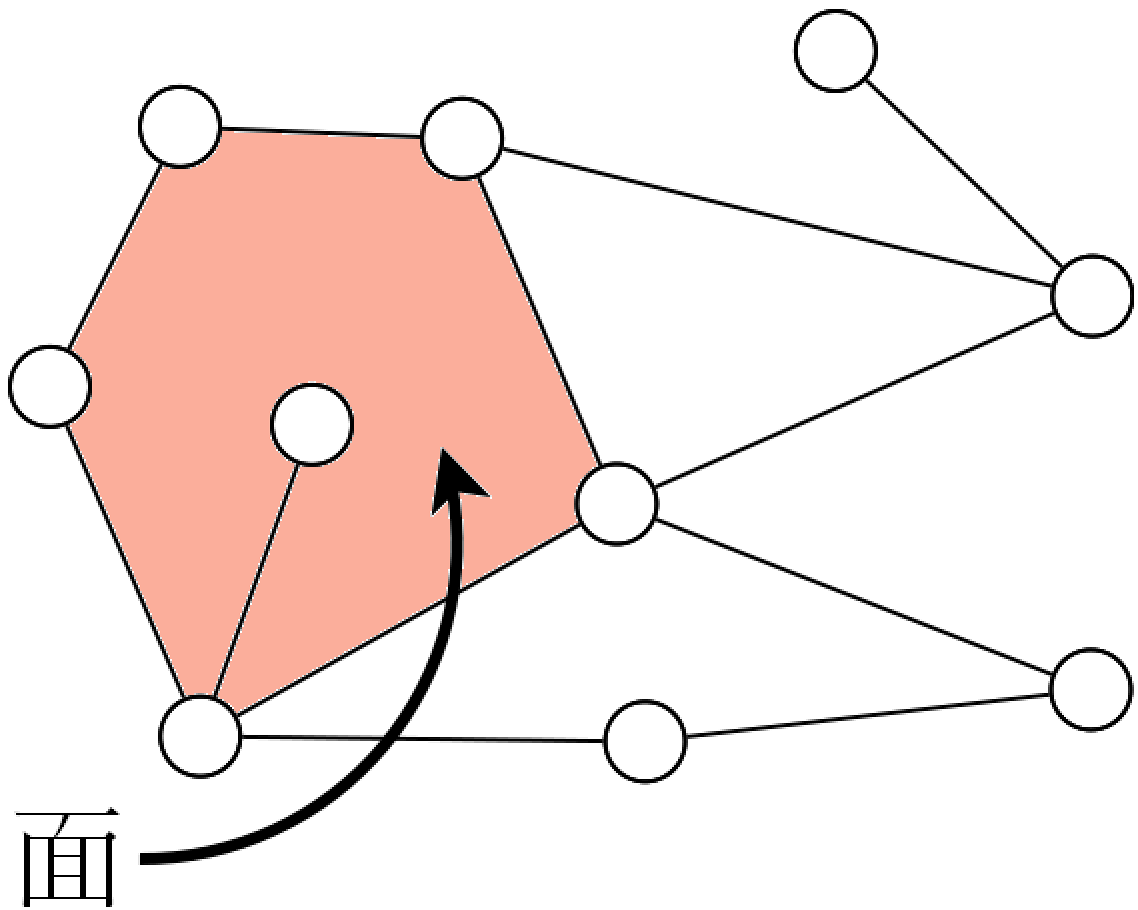
連結領域



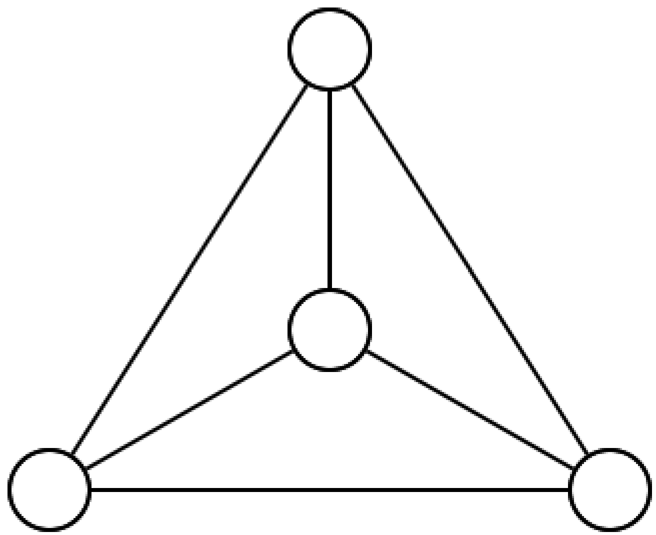
定義2.29



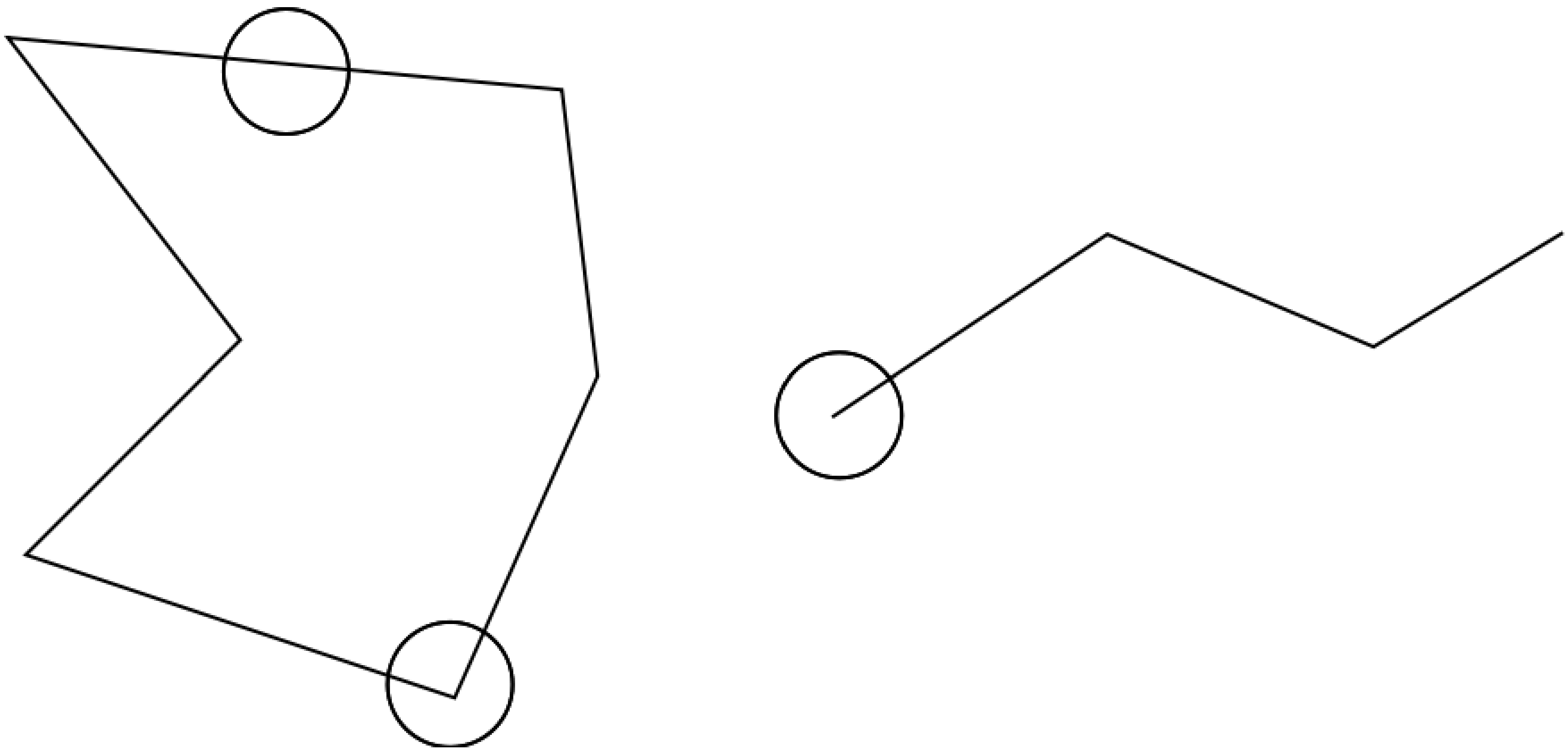
平面埋め込み



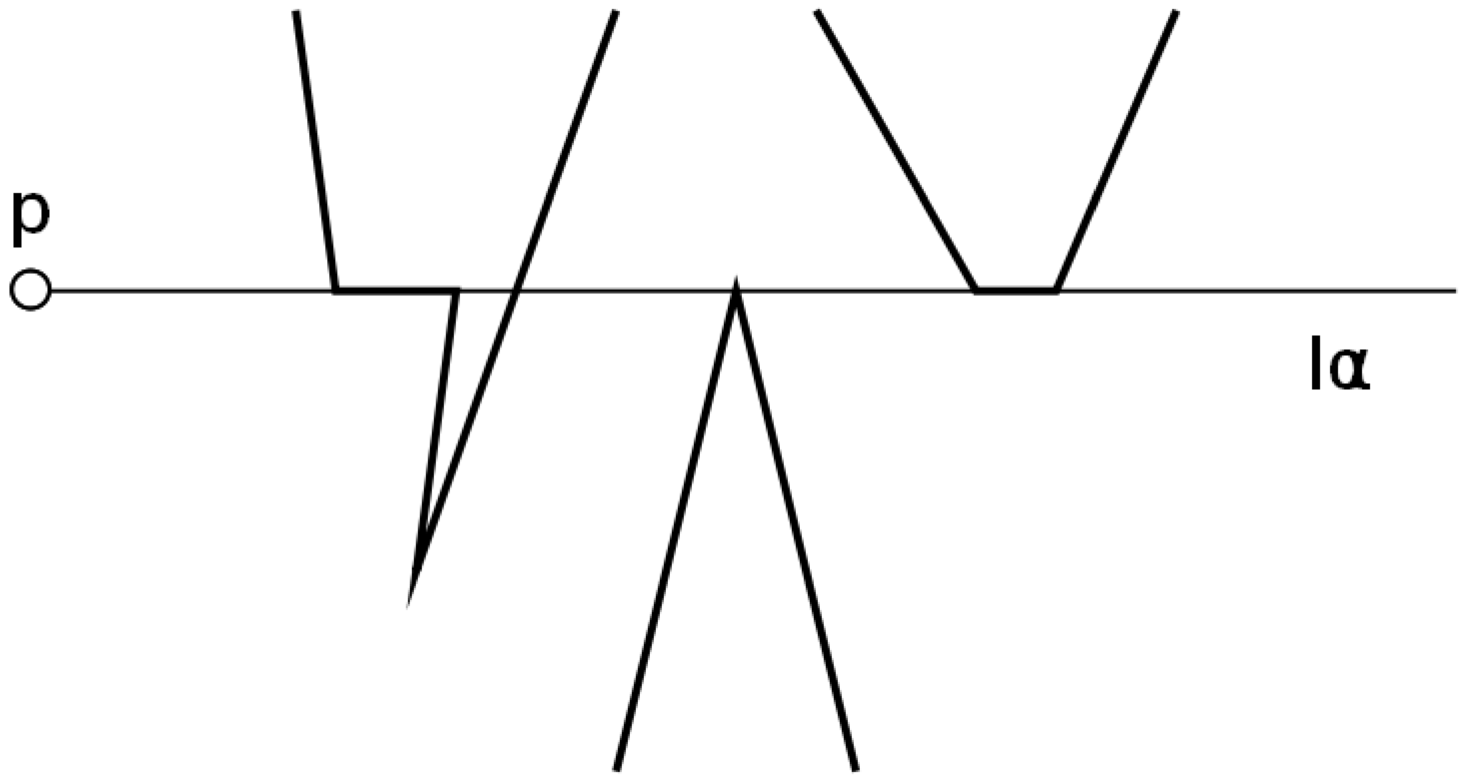
K4



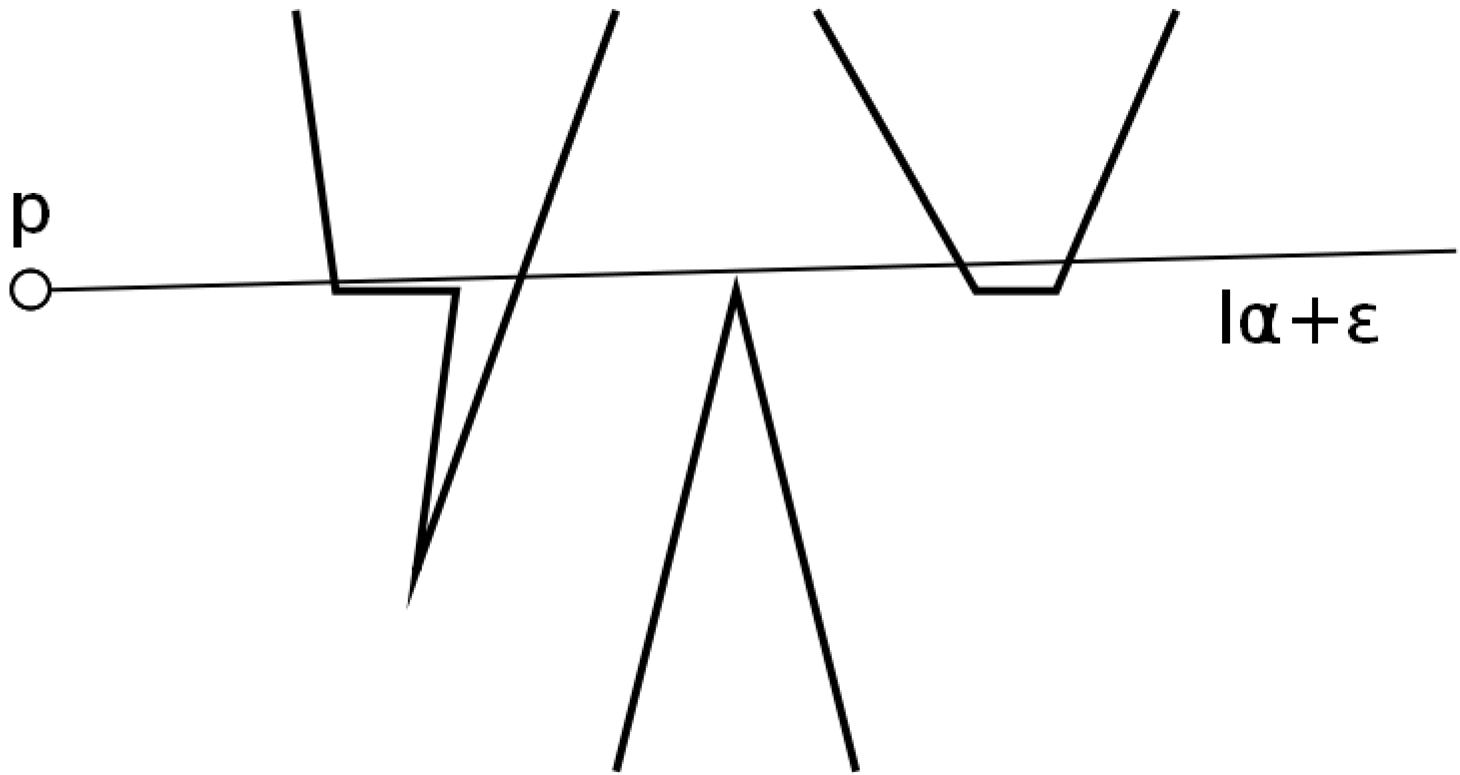
定理2.30 (1)



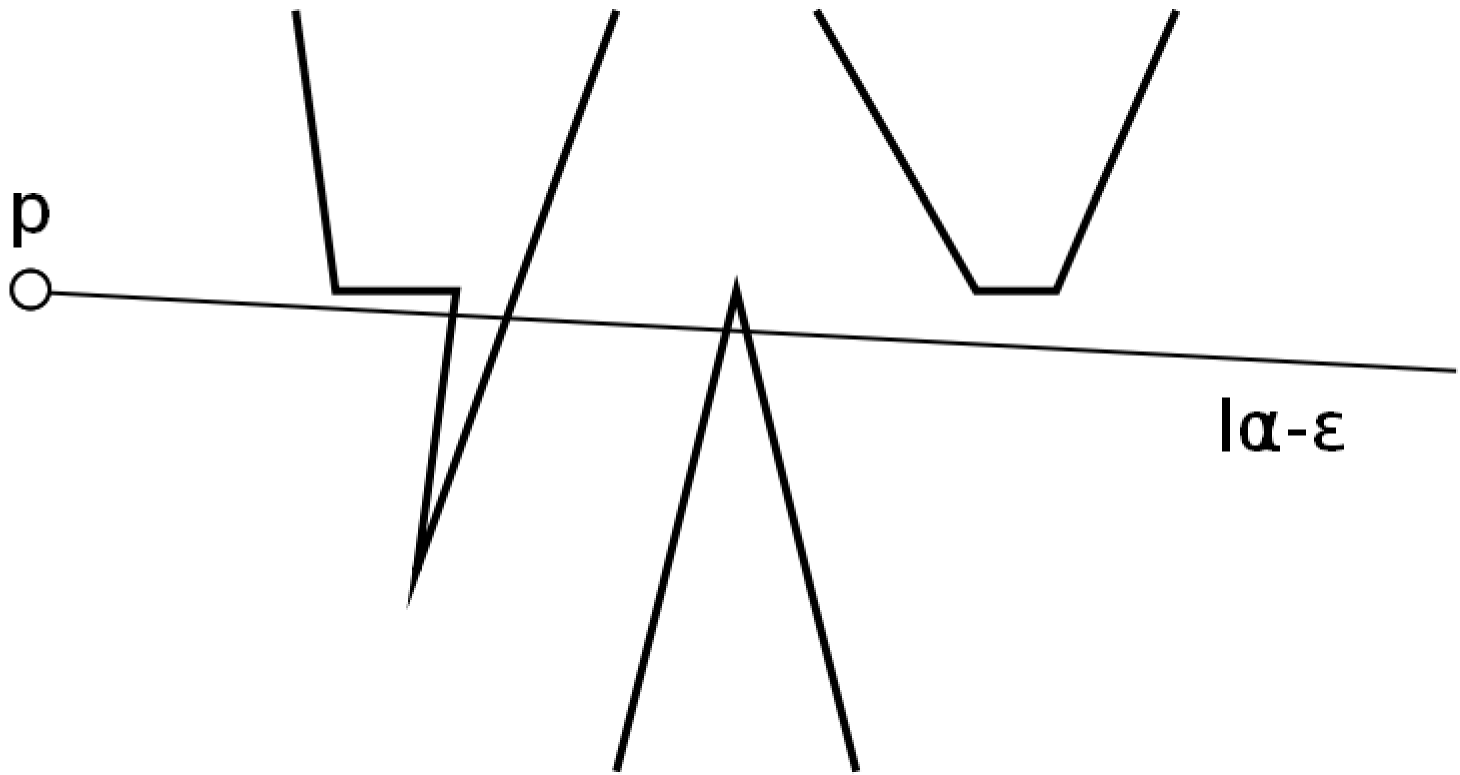
定理2.30 (2)



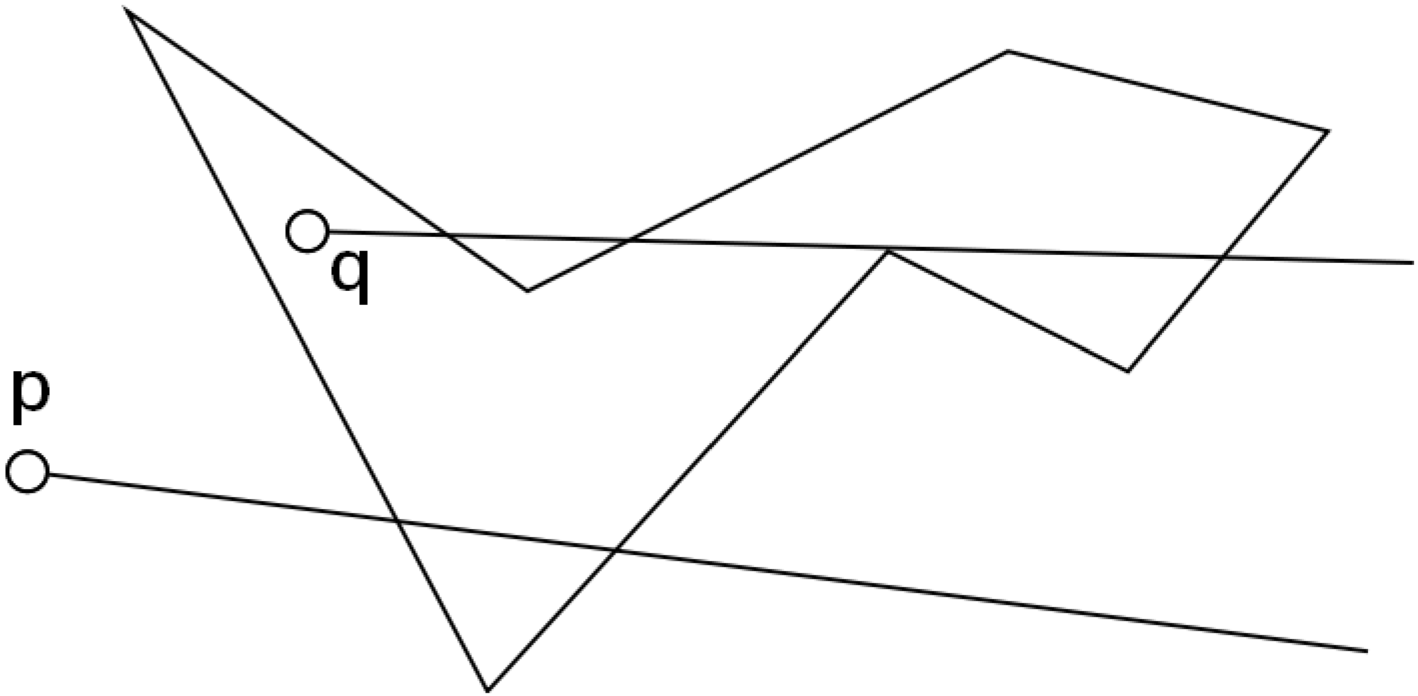
定理2.30 (3)



定理2.30 (4)



定理2.30 (5)



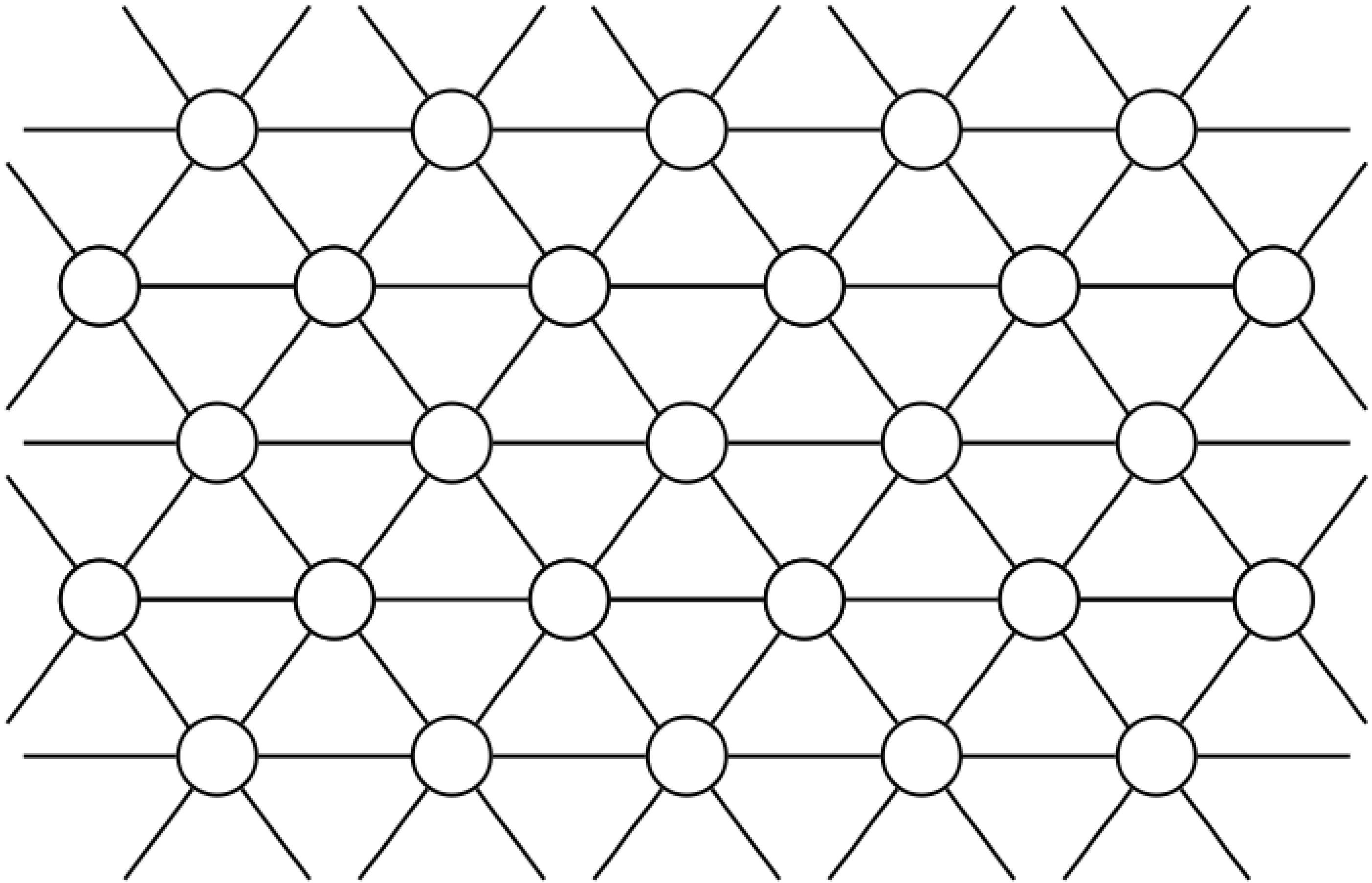
命題2.31

- Gが閉路の時は成り立つ。
- Gに対してプロパーな耳分解をしたグラフをG'とする。
- GはG'より1個多く面を持ち、k+1個の辺を多く持ち、k個の点を多く持つ。
- 帰納法により成り立つ。

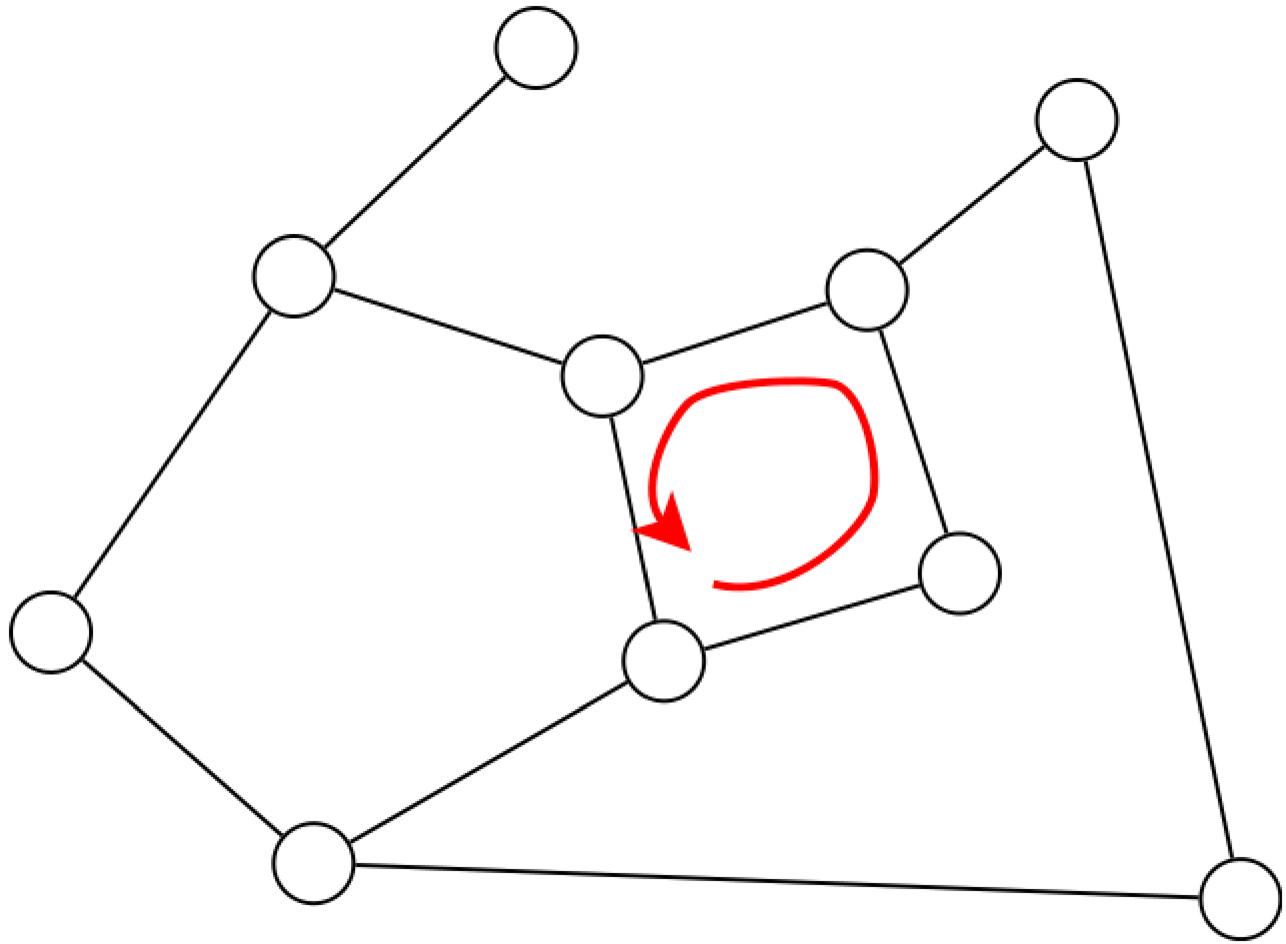
定理2.32

- $|V(G)|<3$または2連結の時は成り立つ。
- 上のことより、関節点xをもつと仮定できる。
- G-xの各連結成分をC1,...,Ckとして帰納法の仮定を適用すると$|E(G)| - |V(G)| + 2$が成り立つ。

平均次数が約6のグラフ



内周



系2.33

- 2連結であると仮定する。
- 各面の境界はk本以上の辺を含む閉路であり、各辺はちょうど2つの面の境界上にある。
- rを面数とすると$kr \leqq 2|E(G)|$が成り立つ。
- オイラーの公式と組み合わせて

$$|E(G)| \leqq (n-2)\,k\,/\,(k-2)$$

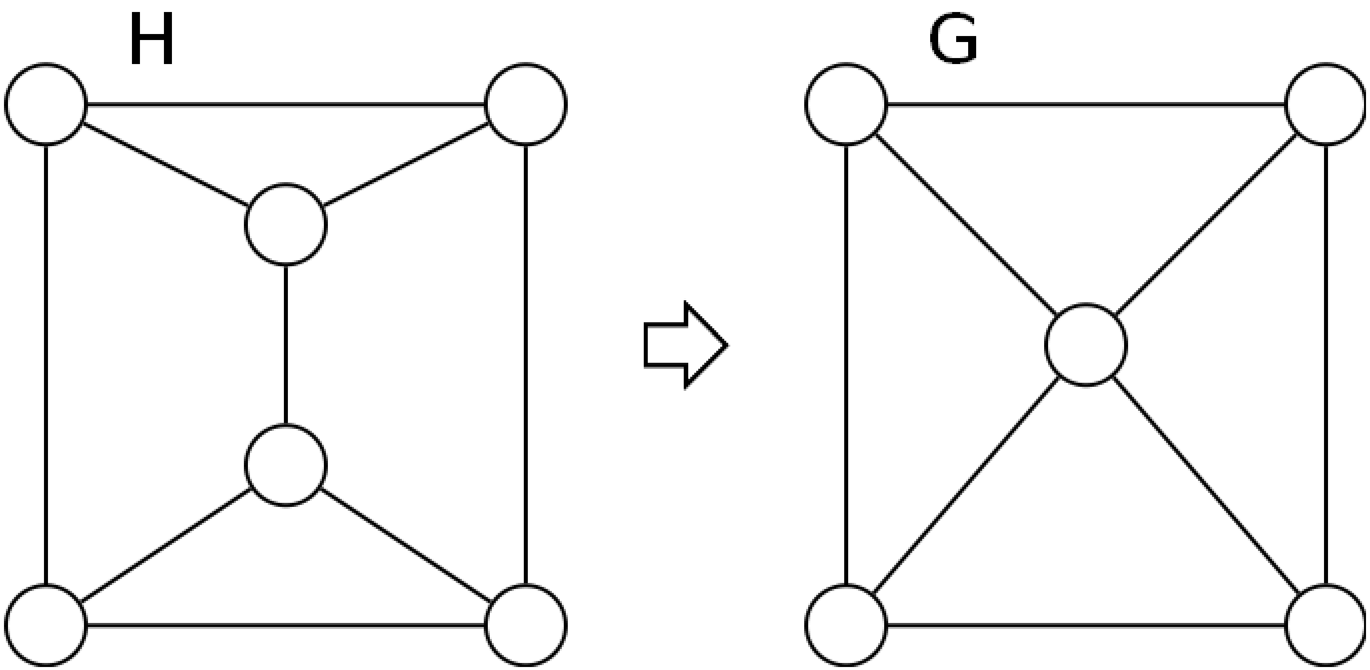
が成り立つ。

- 2連結でない場合は辺を追加して2連結にする。

系2.34

- 系2.33を適用すると成り立つ。

マイナー



補題2.36

- そのような辺eが存在しないと仮定する。
- $e=\{v,w\}$に対して$G - \{v,w,x\}$が非連結となるような点xが存在する。また$|V(C)|<|V(G)|-3$となるような連結成分Cが存在する。
- 最小のCに対して、xの隣接点をyとすると$G - \{x,y,z\}$が非連結となるような点zが存在し、連結成分Dが存在する。
- $|V(C)|>|V(D)|$となり矛盾。

定理2.37 (1)

- 必要性：明らか。
- 十分性：点数についての帰納法を使う。

1, K4は平面的。

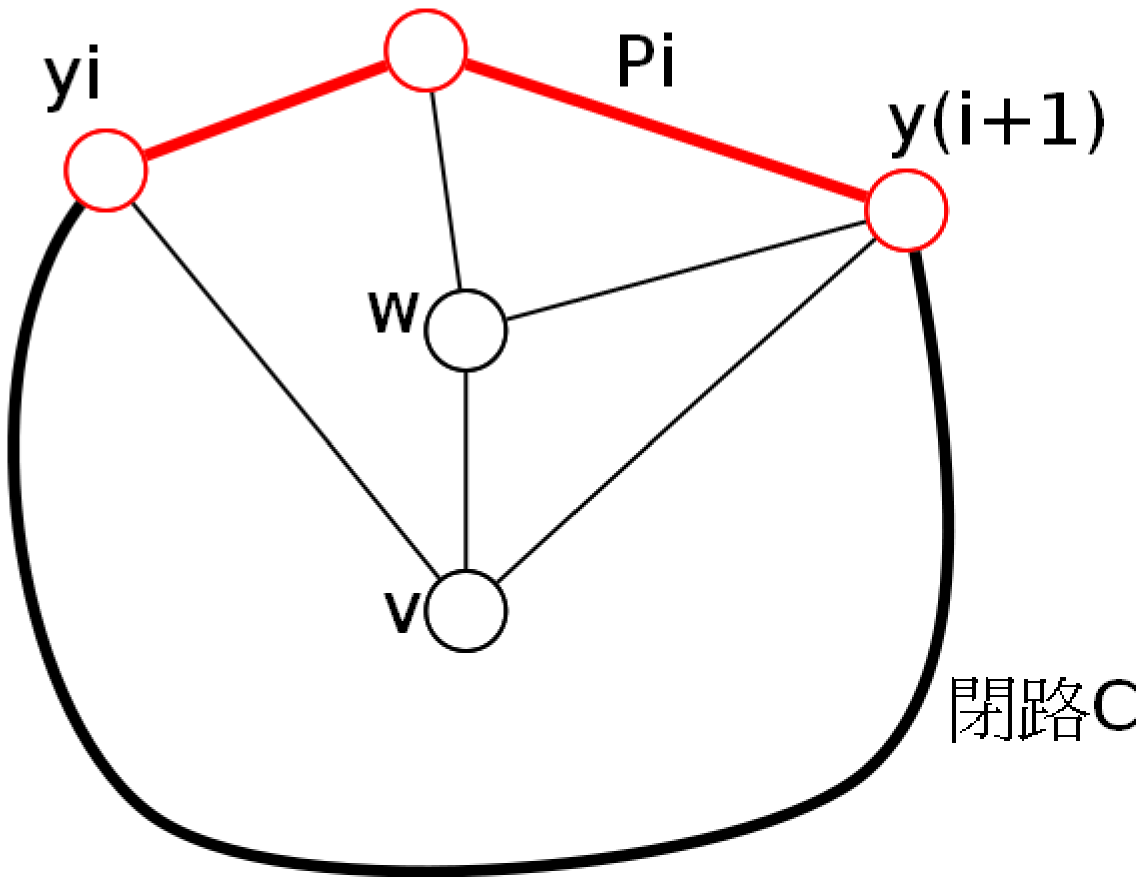
2, GをK5,K33のマイナーを含まない3連結グラフとする。

3, e={v,w}に対してG/eは平面的であるのでG/eの新しい点をxとし平面埋め込みを考える。

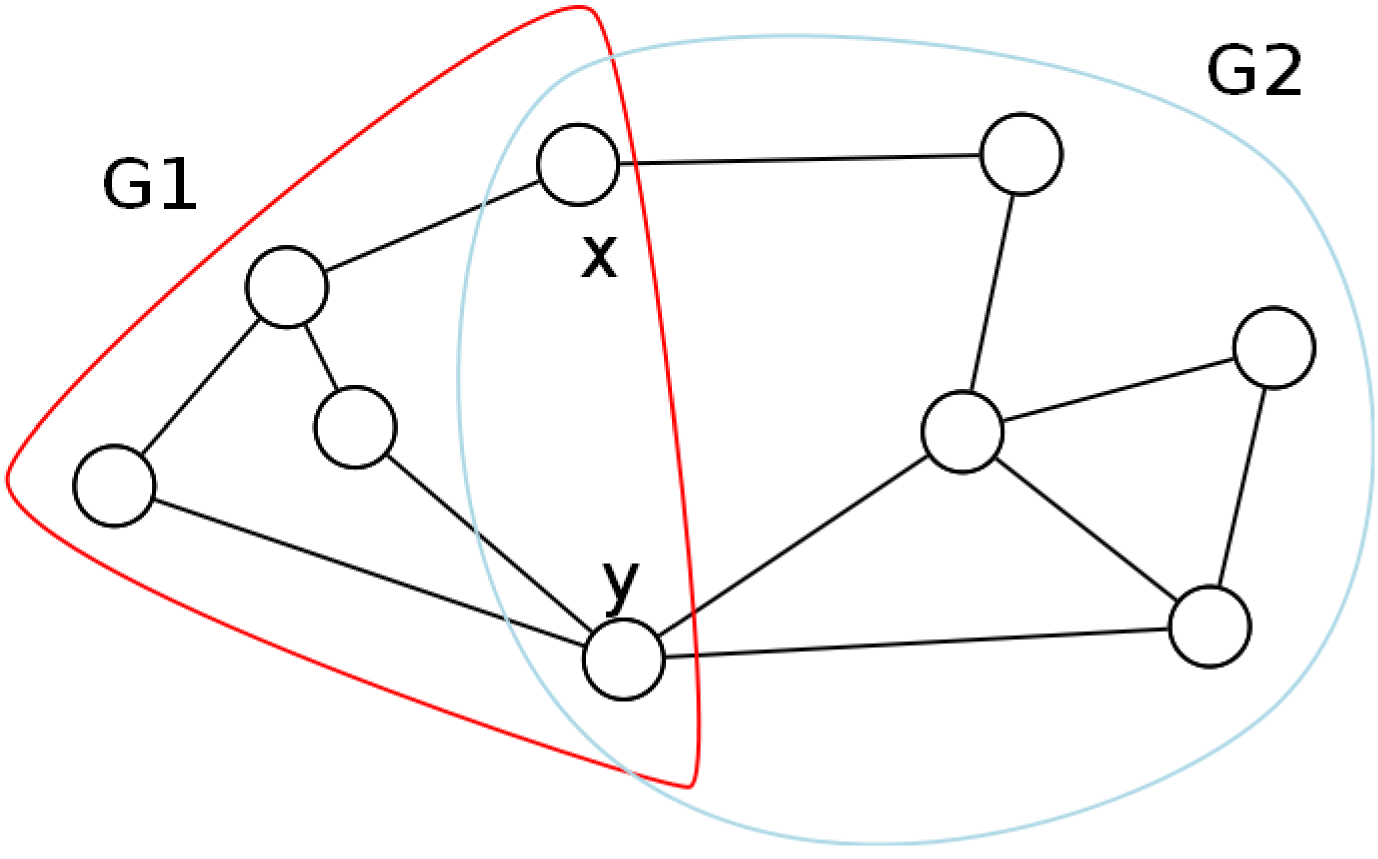
4, (G/e)-xのxを含む境界は閉路Cになっている。

5, V(C)を並べて平面埋め込みを作れる。作れない場合はK5,K33マイナーを含む。

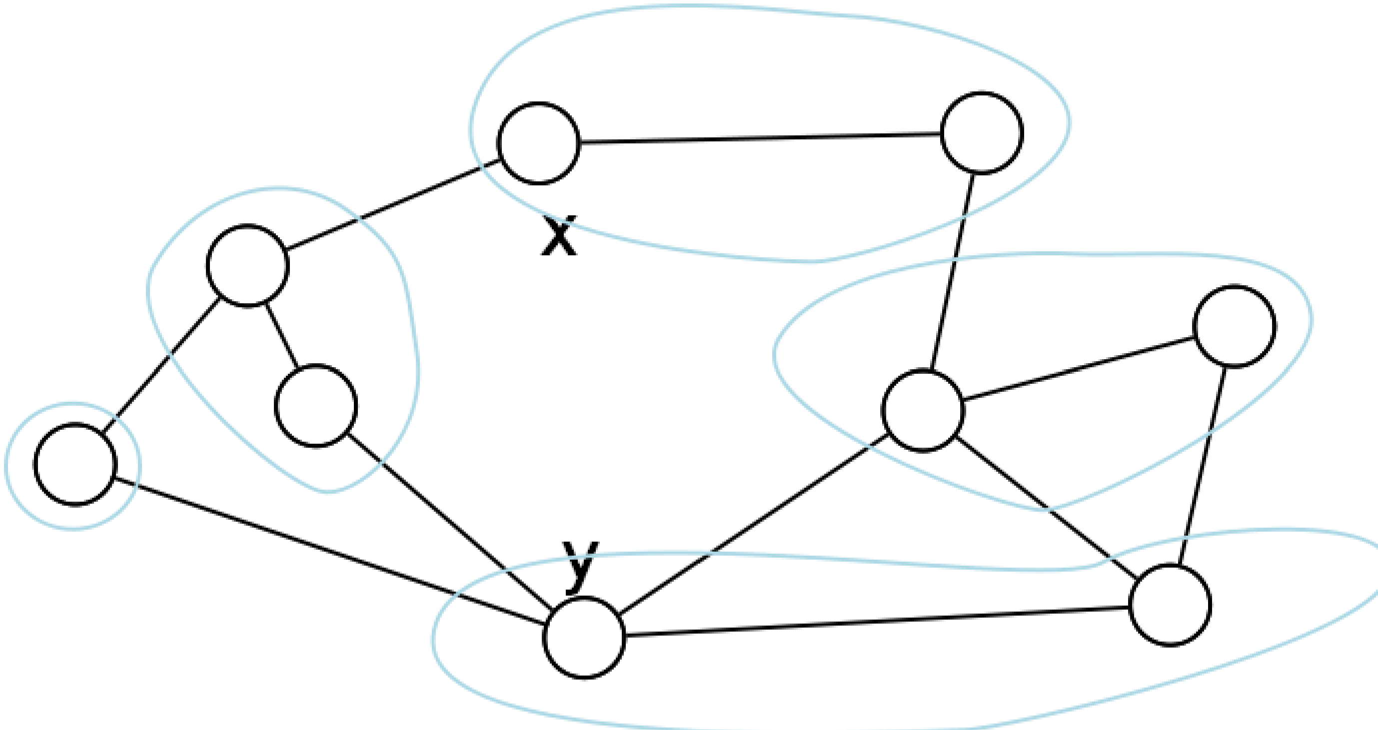
定理2.37 (2)



補題2.38 (1)

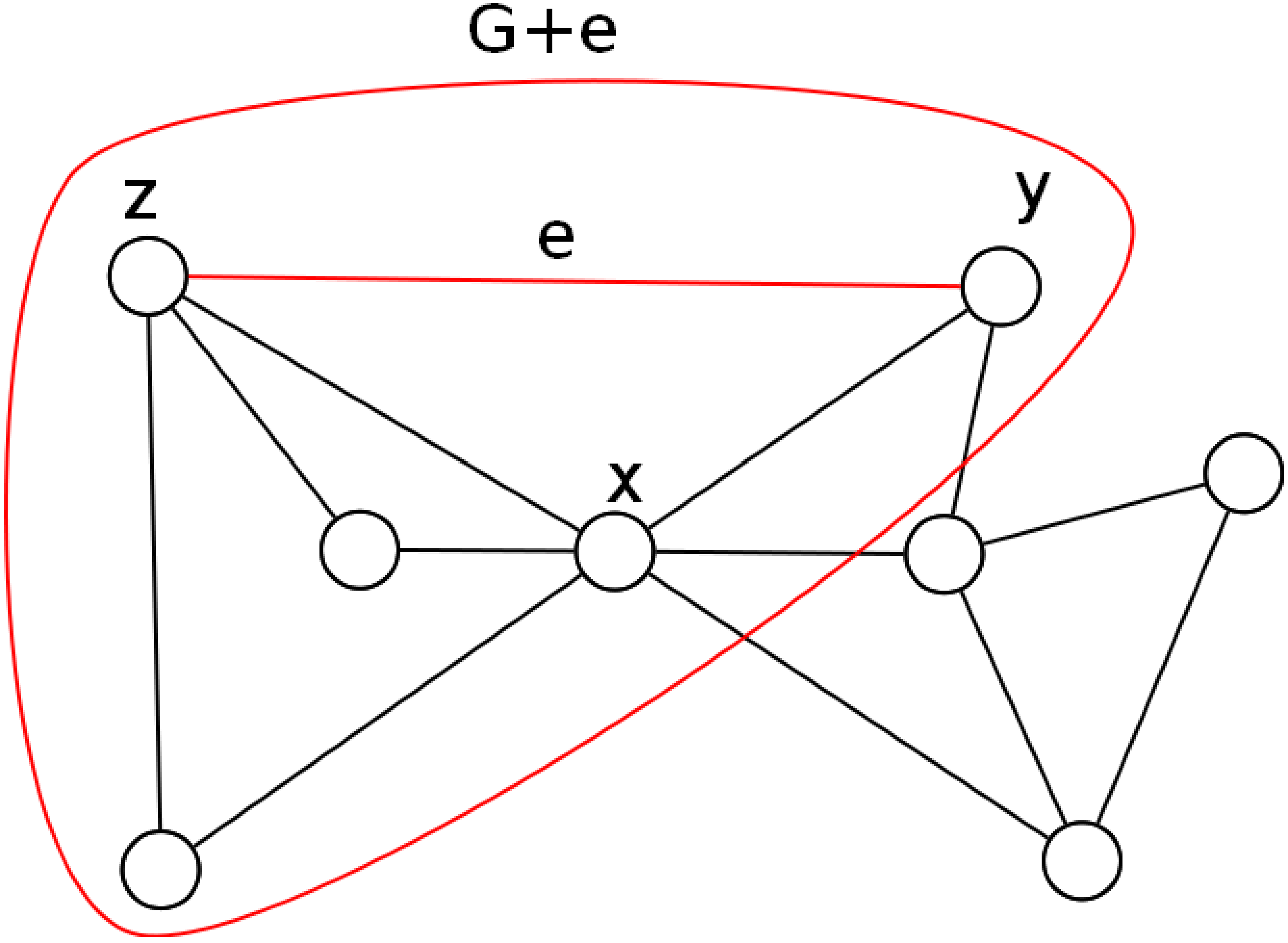


補題2.38 (2)



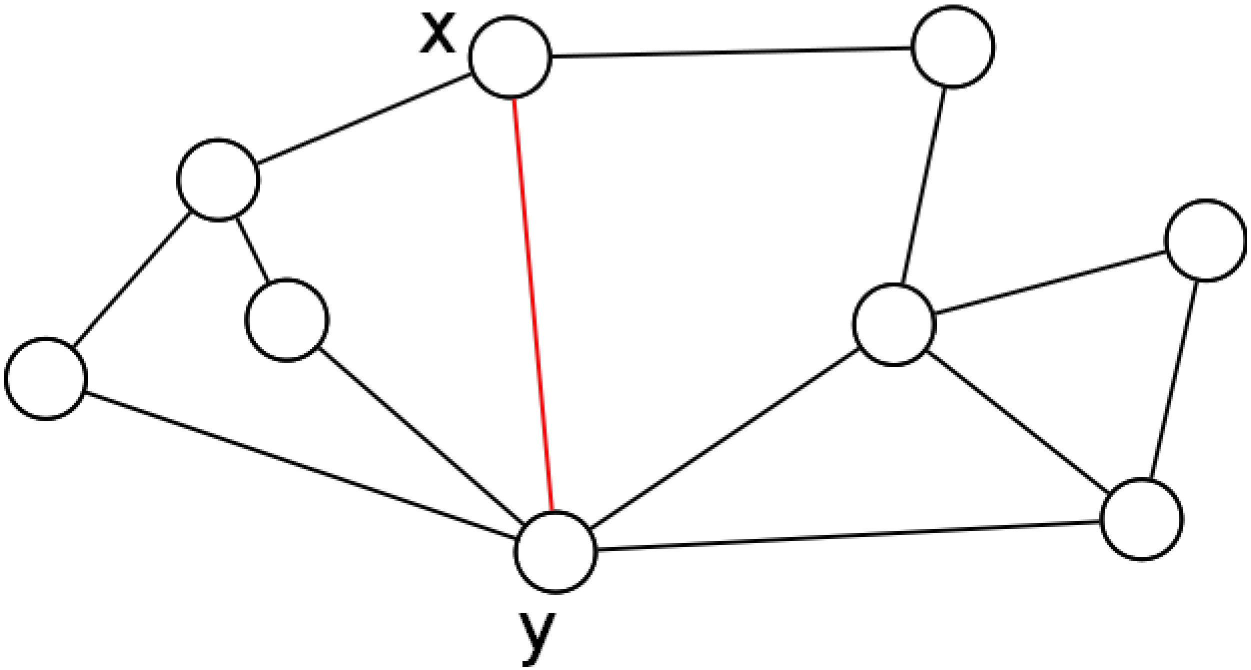
このように分割すると明らかに2連結以下になる。

補題2.38 (3)



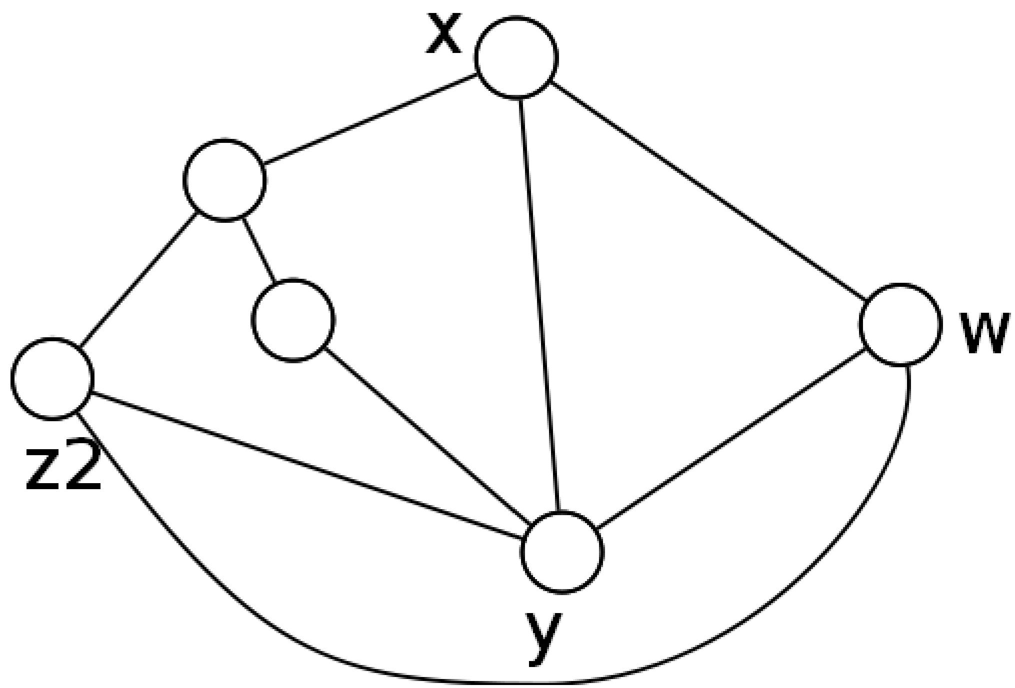
G+eでyの次数は2となるのでZi={y}となる事は無い。

補題2.38 (4)

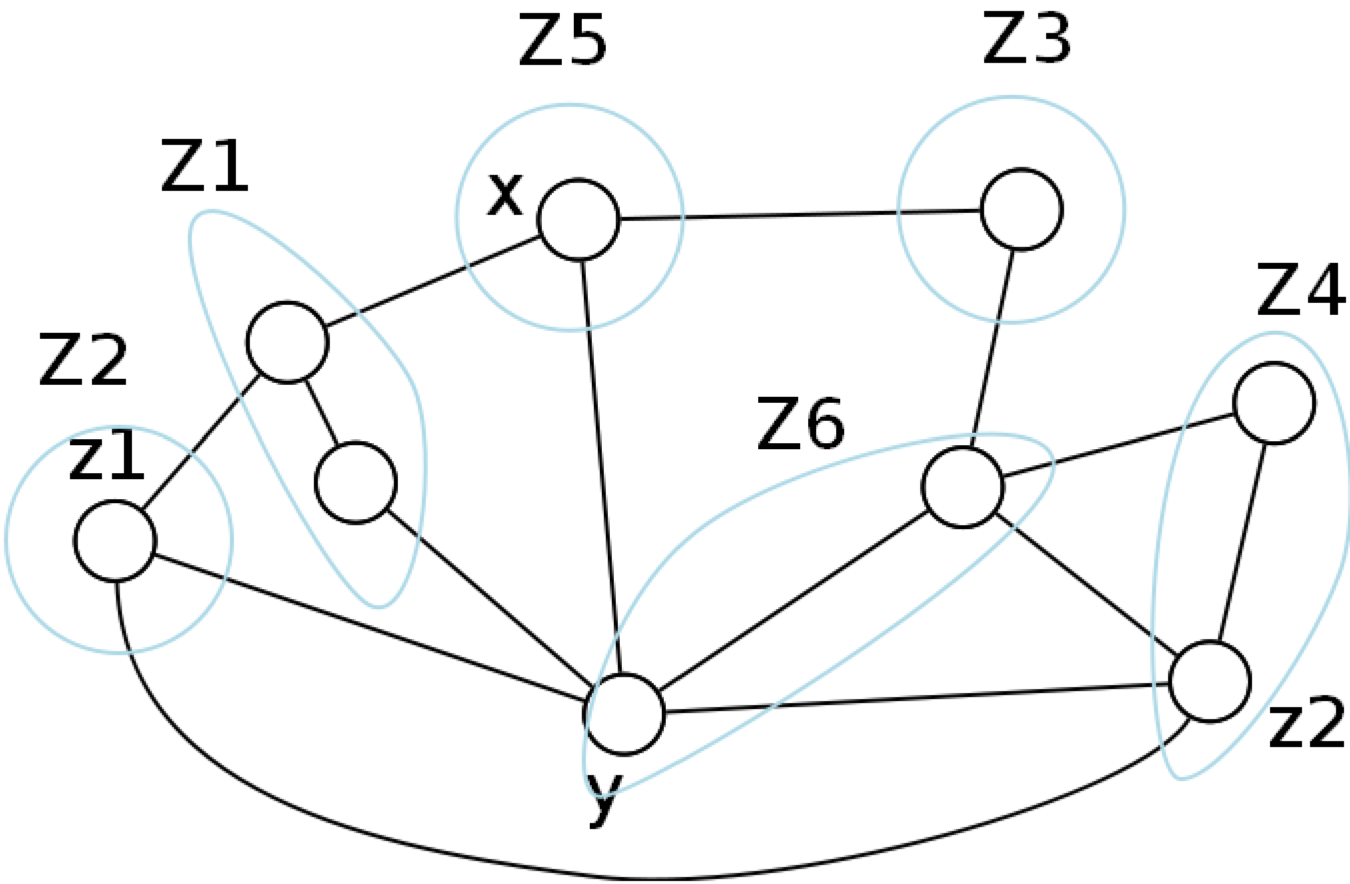


x,yの間に辺が無ければf={x,y}を付け加えればよい。

補題2.38 (5)



補題2.38 (6)

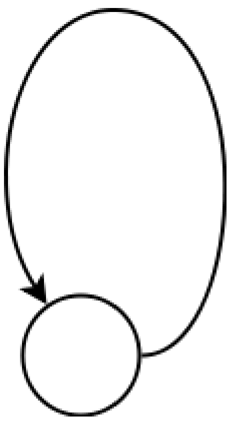


Z1とZ3は隣接しないのでK5ではない。Z1とZ3の共通隣接点はZ5とZ6のみ可能なのでK33ではない。

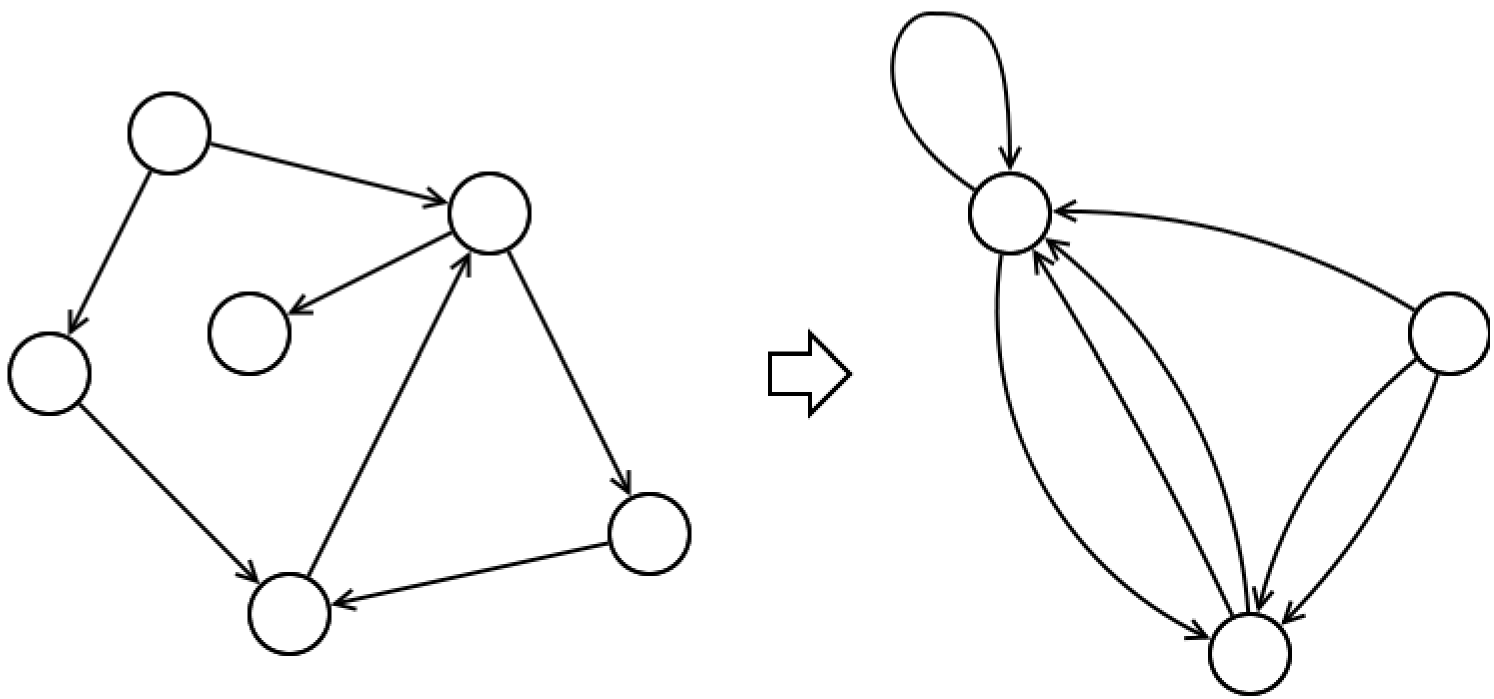
定理2.39

定理2.40

自己ループ

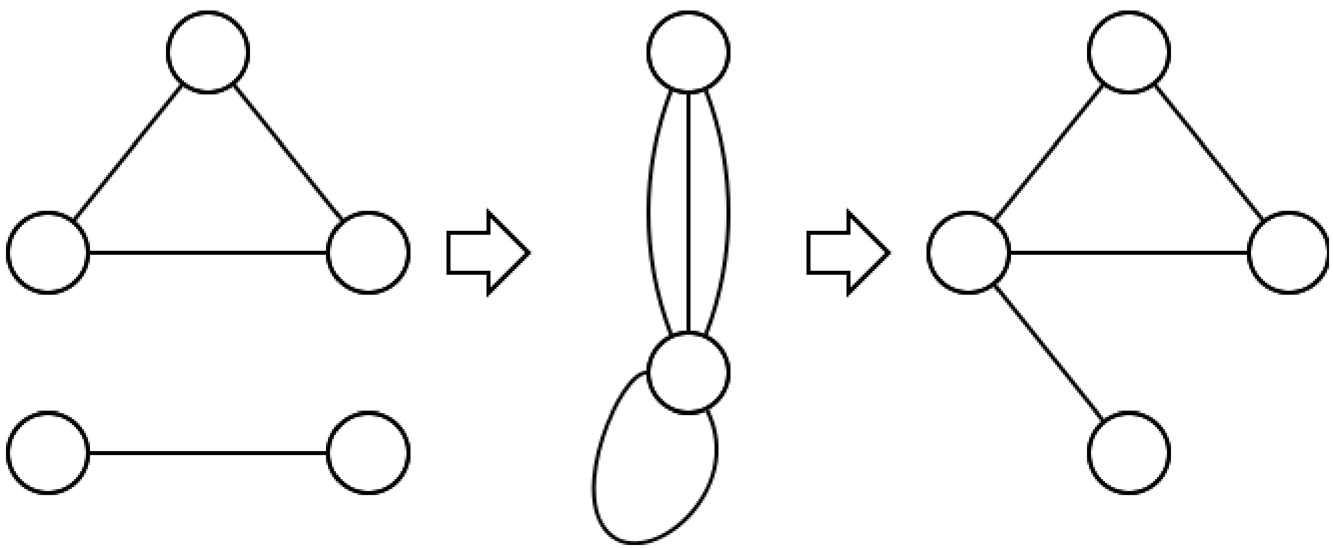


平面的双対グラフ

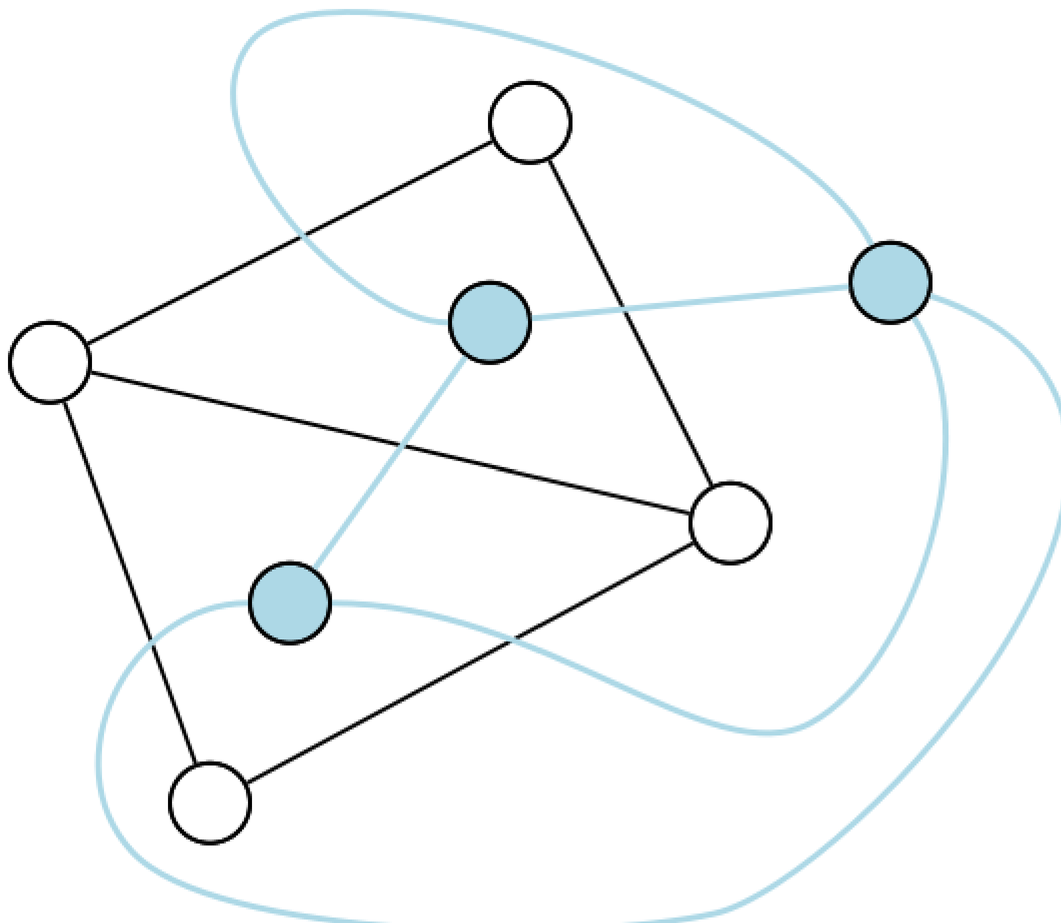


命題2.42

- G*の各面はGの点と一対一対応するので成り立つ。
- 非連結の場合は成り立たない。



定理2.43



系2.44

系2.45

抽象的双対グラフ